$$x_1 = \frac{p_0 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_n}{p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_n}.^{*)}$$

Also jede Unbekannte ist einem Bruche gleich, dessen Nenner das äussere Produkt der Koefficienten $p_1 \ldots p_n$ ist, und dessen Zähler man erhält, wenn man in diesem Produkt statt des Koefficienten jener Unbekannten die rechte Seite, nämlich p_0, als Faktor setzt. Alle Unbekannten haben also denselben Nenner, und werden unbestimmt oder unendlich, wenn dieser Nenner null wird, das heisst

$$p_1 \cdot p_2 \cdots p_n = 0$$

ist.

§ 46.

Dass jene Ausdrücke für $x_1, \ldots, x_n$ nicht etwa blosse Rechnungsformen darstellen, sondern die vollkommenen Lösungen der gegebenen Gleichungen enthalten, wird noch deutlicher erhellen, wenn wir für irgend eine bestimmte Anzahl von Gleichungen statt p_1, p_2 ... ihre Werthe substituiren. Man hat für drei Gleichungen

$$(1) \qquad x_1 = \frac{p_0 \cdot p_2 \cdot p_3}{p_1 \cdot p_2 \cdot p_3},$$

wo

$$p_0 = (a_0 + b_0 + c_0), \quad p_1 = (a_1 + b_1 + c_1), \ldots$$

ist, und zwar a_0 gleichartig ist mit a_1, und so weiter. Substituiren wir diese Ausdrücke in obiger Gleichung, multipliciren durch, indem wir die Produkte der gleichartigen Grössen, da sie null werden, auslassen, und ordnen entsprechend mit Beobachtung des für äussere Produkte festgestellten Zeichengesetzes, so haben wir sogleich, wie man bei geringer Uebung ohne weiteres aus obiger Formel ablesen kann,

$$(2) \qquad x_1 = \frac{a_0 b_2 c_3 - a_0 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_0 - a_2 b_0 c_3 + a_3 b_0 c_2 - a_3 b_2 c_0}{a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1},$$

worin wir, da alles entsprechend geordnet ist, wieder die gewöhnliche Multiplikationsbezeichnung einführen konnten. Dies ist die bekannte 73
Formel, durch welche aus drei Gleichungen mit drei Unbekannten eine derselben bestimmt wird, und es zeigt sich, wie dieselbe vollkommen in der so sehr viel einfacheren Formel (1) enthalten ist.

Wir haben hier, um sogleich die Anwendbarkeit unserer Analyse auch an einem Beispiele, welches nicht mehr auf die drei Dimensionen beschränkt ist, darzuthun, etwas vorgegriffen, indem der Begriff der Zahl und der Division, den wir hier anwandten, erst den Gegenstand

---

*) Die Gesetze der äusseren Multiplikation und Division lassen übrigens kein Heben im Zähler und Nenner zu, vgl. Kapitel IV.

des vierten Kapitels ausmachen werden; wir werden jedoch späterhin noch einmal auf diesen Gegenstand der Anwendung zurückkommen, und dort das Verfahren auch ausdehnen auf Gleichungen höherer Grade.

Drittes Kapitel.

Verknüpfung der Ausdehnungsgrössen höherer Stufen.

A. Theoretische Entwickelung.

§ 47, 48. Summe von Ausdehnungen in einem Gebiete nächst höherer Stufe.

§ 47.

Durch die äussere Multiplikation sind höhere Ausdehnungsgrössen entstanden, die Verknüpfungen derselben [aber] haben wir bisher nur betrachtet, sofern gleichartige Ausdehnungsgrössen addirt werden sollten, indem die Addition sich hier auf den allgemeinen Begriff des Zusammendenkens gründete, welcher überhaupt die Addition des Gleichartigen (wenn dasselbe gleich bezeichnet ist) charakterisirt. Vermöge dieses Begriffs hatten wir die im vorigen Kapitel dargelegten Gesetze entwickelt. Das Grundgesetz der Multiplikation, dass man statt des zerstückten Faktors seine Stücke einzeln einführen, und die so gebildeten Produkte addiren dürfe, fand daher seine Beschränkung darin, dass die dadurch entstehenden Produkte, um sie nach den bisherigen Begriffen addiren zu können, gleichartig sein mussten.

Um diese Beschränkung aufzuheben, werden wir daher den Begriff der Addition für höhere Ausdehnungsgrössen erweitern müssen. Der so erweiterte Begriff muss von der Art sein, dass er erstens bei gleichartigen Ausdehnungsgrössen in den gewöhnlichen umschlägt, und
74 dass für | ihn die Grundbeziehung der Addition zur Multiplikation gilt.
74 Natürlich muss dann für dieselbe die Geltung der Additionsgesetze nachgewiesen werden, ehe jene Verknüpfung als Addition fixirt werden kann. Somit ist klar, dass, wenn es überhaupt eine Addition ungleichartiger Ausdehnungsgrössen höherer Stufen giebt, das Gesetz bestehen muss

$$A . b + A . c = A . (b + c),$$

wo b und c Strecken vorstellen. Nennen wir schon vorläufig diese Verknüpfung eine Addition, um einen bequemeren Wortausdruck zu haben, so würden wir die Definition aufstellen können:

Zwei äussere Produkte n-ter Stufe, welche einen gemeinschaftlichen Faktor (n — 1)-ter Stufe haben, addirt man, indem man die ungleichen Faktoren addirt, und dieser Summe den gemeinschaftlichen Faktor auf dieselbe Weise hinzufügt, wie er den Stücken hinzugefügt war.

§ 48.

Dieser formellen Definition müssen wir zuerst dadurch eine anschaulichere Bedeutung geben, dass wir untersuchen, wie weit sie reicht, das heisst, welche Ausdehnungsgrössen man nach ihr addiren kann.

Es leuchtet sogleich ein, dass zwei Ausdehnungsgrössen n-ter Stufe nur dann nach dem aufgestellten Begriffe summirbar sind, wenn sie demselben Systeme $(n+1)$-ter Stufe angehören; wir werden aber zeigen, dass sie alsdann auch immer summirbar sind, indem je zwei Ausdehnungsgrössen n-ter Stufe A_n und B_n, welche demselben Systeme $(n+1)$-ter Stufe angehören, sich stets auf einen gemeinschaftlichen Faktor $(n-1)$-ter Stufe bringen lassen.

Sind zuerst A_n und B_n gleichartig, so leuchtet es unmittelbar ein, indem, wenn $(n-1)$ einfache Faktoren von A_n konstant bleiben, der n-te aber sich beliebig durch Fortschreitung oder Rückschreitung verändert, auch das Produkt jeden beliebigen mit A_n gleichartigen Werth, also auch den Werth B_n annehmen kann. Hierin liegt zugleich, dass man jede Ausdehnung n-ter Stufe auf $(n-1)$ beliebige Faktoren, welche demselben Systeme n-ter Stufe angehören und von einander unabhängig sind, bringen kann.

Sind A_n und B_n ungleichartig, so sei

$$A_n = a_1 . a_2 \ldots a_n,$$

wo $a_1, \ldots, a_n$ Strecken vorstellen, welche von einander unabhängig sind. Dann muss B_n nothwendig wenigstens Einen Faktor enthalten, | welcher 75
von den sämmtlichen Strecken $a_1 \ldots a_n$ unabhängig ist; es sei a_{n+1} ein solcher Faktor, und also

$$B_n = b_1 . b_2 \ldots b_{n-1} . a_{n+1}. \qquad 75$$

Da in einem System $(n+1)$-ter Stufe nicht mehr als $(n+1)$ von einander unabhängige Strecken angenommen werden können, so muss jeder von den Faktoren $b_1 \ldots b_{n-1}$ von jenen Strecken $a_1 \ldots a_{n+1}$ abhängig sein, das heisst sich als Summe darstellen lassen, deren Stücke diesen Strecken gleichartig sind. Denkt man sich nun jeden dieser Faktoren $b_1 \ldots b_{n-1}$ als solche Summe dargestellt, so kann man nun in jeder dasjenige Stück, was mit a_{n+1} gleichartig ist, weglassen, ohne den Werth des Produktes B_n zu ändern (vgl. § 35). Nach dieser

Weglassung sei das Produkt $b_1 \,.\, b_2 \ldots b_{n-1}$ übergegangen in C_{n-1}, so ist also

$$B_n = C_{n-1} \,.\, a_{n+1} \,.$$

Die Faktoren von C_{n-1} sind nur noch von den Strecken $a_1 \ldots a_n$, das heisst von den Faktoren der Ausdehnungsgrösse A_n abhängig; oder mit andern Worten, sie gehören dem Systeme A_n an, folglich wird sich A_n nach der im Anfang dieses Paragraphen angewandten Schlussfolge auf den Faktor C_{n-1} bringen lassen, wenn der n-te Faktor willkührlich gewählt werden darf; somit lassen sich beide Ausdehnungsgrössen A_n und B_n auf den gemeinschaftlichen Faktor C_{n-1} bringen, welcher von $(n-1)$-ter Stufe ist, oder, wie wir uns auch kürzer ausdrücken, beide haben eine Ausdehnungsgrösse $(n-1)$-ter Stufe gemeinschaftlich. So wird nun die obige Definition so umgewandelt werden können:

Zwei Ausdehnungsgrössen n-ter Stufe, welche demselben System $(n+1)$-ter Stufe angehören, werden addirt, indem man sie auf einen gemeinschaftlichen Faktor $(n-1)$-ter Stufe bringt, und die Summe der ungleichen Faktoren mit diesem gemeinschaftlichen Faktor verknüpft.

§ 49, 50. **Geltung der Additionsgesetze für diese neue Summe.**

§ 49.

Um nun die Geltung der Additionsgesetze, oder vielmehr zunächst nur die der Grundgesetze nachzuweisen, haben wir zuerst die Vertauschbarkeit der Stücke darzuthun. Diese Stücke werden sich nach dem vorigen Paragraphen darstellen lassen in der Form $A \,.\, b$ und $A \,.\, c$. Nun ist

$$A \,.\, b + A \,.\, c = A \,.\, (b + c) = A \,.\, (c + b) = A \,.\, c + A \,.\, b \,,$$

76 also sind die Stücke vertauschbar. Das zweite Gesetz, dessen | Geltung nachgewiesen werden muss, ist, dass

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

76 sei, auch dann, wenn A, B, C Ausdehnungen n-ter Stufe in demselben Systeme $(n+1)$-ter Stufe sind, und die Addition den vorher bezeichneten Begriff haben soll.

Wir haben zu dem Ende die Frage zu beantworten, was drei solche Ausdehnungen gemeinschaftlich haben werden. Nun ist schon im vorigen Paragraphen gezeigt, dass je zwei derselben eine Ausdehnung $(n-1)$-ter Stufe gemeinschaftlich haben müssen; so zum Beispiel hat B sowohl mit A als mit C eine solche gemeinschaftlich; und da diese beiden Ausdehnungen $(n-1)$-ter Stufe, nämlich, welche B mit A, und welche es mit C gemeinschaftlich hat, demselben Systeme B *), also demselben Systeme n-ter Stufe angehören, so haben sie nach demselben Satze des vorigen Paragraphen eine Ausdehnung $(n-2)$-ter Stufe gemeinschaftlich, und diese ist somit allen drei Grössen A, B, C gemeinschaftlich. Es sei D dieser gemeinschaftliche Faktor $(n-2)$-ter Stufe, so werden sich jene drei Grössen, da überdies je zwei eine Ausdehnung $(n-1)$-ter Stufe gemeinschaftlich haben, auf die Formen bringen lassen

$$A = D \,.\, b \,.\, c, \quad B = D \,.\, a \,.\, c, \quad C = D \,.\, a \,.\, b_1 .$$

Nämlich je zwei derselben werden ausser D noch einen gemeinschaftlichen Faktor erster Stufe haben, dessen Grösse aber willkührlich ist. Dieser sei c zwischen A und B, zwischen B und C sei er a, und zwar sei die Grösse von a so bestimmt, dass $B = D \,.\, a \,.\, c$ sei; der gemeinschaftliche Faktor, auf welchen A und C gebracht werden können, sei ausser D der Faktor b, oder ein mit b gleichartiger b_1, und zwar seien b und b_1 so gewählt, dass

$$A = D \,.\, b \,.\, c \quad \text{und} \quad C = D \,.\, a \,.\, b_1$$

sei.

Nachdem nun A, B, C auf diese Form gebracht sind, zeigt sich, dass sich $(A + B) + C$ durch die folgenden Umgestaltungen in $A + (B + C)$ verwandeln lässt. Erstens

$$(A + B) + C = (D \,.\, b \,.\, c + D \,.\, a \,.\, c) + D \,.\, a \,.\, b_1 .$$

Wir haben nun die durch die Klammer angedeutete Summation zu vollziehen. Nun lässt sich der Ausdruck $D \,.\, b \,.\, c + D \,.\, a \,.\, c$ zurückführen | auf $D \,.\, (b + a) \,.\, c$; man kann nämlich zuerst in beiden Sum- 77
manden c auf die vorletzte Stelle bringen, wobei die Vorzeichen sich ändern, dann kann man nach der Definition die Summation | vornehmen, 77
und endlich mit derselben Zeichenänderung den summirten Faktor wieder auf die alte Stelle bringen und erhält

$$(A + B) + C = D \,.\, (b + a) \,.\, c + D \,.\, a \,.\, b_1 .$$

Um nun diese beiden Glieder summiren zu können, hat man nur statt $D \,.\, a \,.\, b_1$ zu setzen $D \,.\, (b + a) \,.\, b_1$, was verstattet ist, weil b mit b_1 gleichartig ist, und man den Faktoren, ohne das Resultat zu ändern, Stücke hinzufügen darf, welche den andern Faktoren gleichartig sind (§ 35). Führt man dann auf der rechten Seite die Summation aus, so hat man

$$(A + B) + C = D \,.\, (b + a) \,.\, (c + b_1),$$

---

*) Wir benennen das System eben so wie die Ausdehnung, welche einen Theil von ihm bildet, weil keine Zweideutigkeit möglich ist.

wodurch man die drei Glieder auf eins zurückgeführt hat*). In diesem Gliede kann man nun zuerst die Summe $b + a$ wieder auflösen und erhält auf der rechten Seite den Ausdruck

$$D . b . (c + b_1) + D . a . (c + b_1).$$

In dem ersten Gliede dieses Ausdrucks kann nun wieder (§ 35) das Stück b_1 weggelassen und das zweite Glied aufgelöst werden; dadurch verwandelt sich der ganze Ausdruck in

$$D . b . c + (D . a . c + D . a . b_1),$$

das heisst in $A + (B + C)$ und man hat also in der That

$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

§ 50.

Es ist nun noch das dritte Grundgesetz (§ 6) zu erweisen, dass nämlich das Resultat der Subtraktion eindeutig ist, oder dass, wenn das eine Stück unverändert bleibt, das andere aber sich ändert, auch die Summe sich ändern müsse.

Es sei innerhalb eines Systems $(n + 1)$-ter Stufe

$$A + B = C,$$

wo A, B und C von n-ter Stufe sind. Es ändere sich B in $B + D$, so wird nun

$$A + (B + D) = (A + B) + D = C + D$$

sein, und es ist zu zeigen, dass wenn $B + D$ von B verschieden ist,
78 auch $C + D$ von C verschieden sein müsse. Das erstere setzt | voraus, dass D nicht null sei; nun können wir aber zeigen, dass, wenn D nicht null ist, es auch zu einer Grösse (C) hinzugelegt, ihren Werth ändern müsse.

Unmittelbar ist dies klar, wenn C und D gleichartig sind, indem
78 das durch Zusammendenken des Gleichartigen | hervorgegangene nothwendig von jedem der Stücke verschieden ist. Sind aber C und D verschiedenartig, so lässt sich leicht zeigen, dass ihre Summe mit beiden verschiedenartig ist (immer vorausgesetzt, dass keins von beiden null ist). Da alles in demselben Systeme $(n + 1)$-ter Stufe angenommen ist, so werden C und D sich auf einen gemeinschaftlichen Faktor $(n - 1)$-ter Stufe bringen lassen. Es sei dieser E und

*) Man könnte nun zeigen, dass der Ausdruck: $A + (B + C)$ sich auf dasselbe Glied zurückführen liesse, allein wir setzen den einmal eingeschlagenen Weg der fortschreitenden Umwandlung fort.

$$C = E \, . \, c, \quad D = E \, . \, d,$$

also

$$C + D = E \, . \, (c + d).$$

Sind nun C und D verschiedenartig, so darf d nicht in dem Systeme $E \, . \, c$ enthalten sein, also ist auch $(c + d)$ nicht in ihm enthalten, also auch $E \, . (c + d)$ mit $E \, . \, c$ verschiedenartig, also kann es ihm auch nicht gleich sein. Somit wird durch Hinzulegen der Grösse D auch die Grösse C geändert; wenn also das eine Stück jener Summe sich ändert, während das andere dasselbe bleibt, so muss auch die Summe sich ändern. Soll folglich die Summe und das eine Stück derselben unverändert bleiben, so muss es auch das andere, das heisst das Resultat der Subtraktion ist eindeutig.

Da nun alle drei Grundgesetze der Addition und Subtraktion hier gelten, so gelten auch alle Gesetze derselben.

Die Grundbeziehung dieser Addition zur Multiplikation ist noch nicht vollständig dargelegt; nach der Definition ist zwar

$$A \, . \, b + A \, . \, c = A \, . \, (b + c);$$

allein es ist auch zu zeigen, dass

$$(A + B) \, . \, c = A \, . \, c + B \, . \, c$$

ist, wenn A und B Grössen n-ter Stufe in einem Systeme $(n + 1)$-ter Stufe sind. Dann kann man $A = E \, . \, a$, $B = E \, . \, b$ setzen (nach § 48), und hat

$$A \, . \, c + B \, . \, c = E \, . \, a \, . \, c + E \, . \, b \, . \, c.$$

Der rechts stehende Ausdruck lässt sich, wenn man a und b zuerst auf die letzte Stelle bringt (wobei sich das Zeichen ändert), dann nach der Definition summirt, und endlich den Faktor $(a + b)$ wieder auf die vorletzte Stelle zurückbringt (wobei das Zeichen wieder das ursprüngliche wird), verwandeln in $E \, . (a + b) \, . \, c$, das heisst in | $(A + B) \, . \, c$, 79
also [ist] die Richtigkeit jener Gleichung bewiesen.

Da somit die Grundgesetze der Beziehung zwischen Addition und Multiplikation hier gelten, so gelten auch alle Gesetze dieser Beziehung, und unsere Verknüpfungsweise ist daher sowohl an sich, als auch | in 79
ihrer Beziehung als wahre Addition nachgewiesen. Somit können wir nun den Hauptsatz des vorigen Kapitels (§ 36) dahin erweitern:

Für äussere Produkte gelten, wenn Produkte aus n einfachen Faktoren nur in einem Systeme $(n + 1)$-ter Stufe betrachtet werden, alle Gesetze der Addition und Subtraktion, und alle Gesetze der Beziehung zwischen ihnen und der Multiplikation, wenn man die für diese Verknüpfungen aufgestellten Begriffe festhält.

§ 51. Formelle Summe oder Summengrösse.

Auch dies Gesetz hat also noch eine Beschränkung in sich, was darin seinen Grund hat, dass wir höhere Ausdehnungen bisher nur addiren konnten, wenn sie einem und demselben Systeme nächst höherer Stufe angehörten. Wir müssen nun, um das Gesetz in seiner Allgemeinheit aufstellen zu können, auch zeigen, was unter der Summe von Ausdehnungen, welche in beliebig höheren Systemen liegen, verstanden sein könne.

Wollten wir hier denselben Weg einzuschlagen versuchen, wie in den vorhergehenden Paragraphen, und also als Summe zweier Grössen $A.B$ und $A.C$, welche nicht demselben Systeme nächst höherer Stufe angehören, die Grösse $A.(B+C)$ auffassen, so würde dies zu nichts führen, da dann B und C auch Ausdehnungen höherer Stufen sind, welche nicht einem und demselben Systeme nächst höherer Stufe angehören, und also die eine Summe ihrer Bedeutung nach eben so unbekannt ist, wie die andere. Es bleibt uns also nichts übrig, als den Begriff der Summe in diesem Falle rein formell aufzufassen, ohne dass es möglich wäre, eine Ausdehnung aufzuweisen, welche als die Summe sich darstellte.

Wir definiren daher die Summe von Ausdehnungen n-ter Stufe, welche einem höheren Systeme als dem $(n+1)$-ter Stufe angehören, dadurch, dass die Grundgesetze der Addition auf dieselbe anwendbar sein sollen, das heisst also als „dasjenige, was konstant bleibt, welche Veränderungen man auch mit der Form der Summe durch Anwendung der Additions- und Subtraktions-Gesetze vornehmen mag."

80 Es erscheint somit diese Summe nicht mehr als reine Ausdehnung, das heisst als solche, welche durch fortschreitende Multiplikation der Strecken gewonnen werden könnte, sondern sie tritt als Grösse von neuer Art, und zwar zunächst als Grösse von bloss formeller Bedeu-
80 tung hervor, die wir | daher am passendsten mit dem Namen der *Summengrösse* belegen könnten; wir fassen sie mit der Ausdehnung unter dem Begriffe der *Ausdehnungsgrösse* zusammen. Um ihre konkrete Bedeutung zu gewinnen, müssten wir ihren Bereich ausmitteln, das heisst aufsuchen, wie sich die Form der Summe, die in dem Werth der Stücke besteht, ändern könne, ohne dass der Werth der Summe selbst sich ändere. Dadurch erhalten wir eine Reihe von konkreten Darstellungen jener formellen Summe, und die Gesammtheit dieser möglichen Darstellungen in Eins zusammengeschaut, wie die Arten einer Gattung (nicht wie die Theile eines Ganzen), würde uns den konkreten Begriff vor Augen legen.

Indessen da diese Summengrösse nicht eher als in einem Systeme vierter Stufe eintreten kann, sie also im Raume, als einem Systeme dritter Stufe, keine Anwendung findet, so versparen wir uns diese Darstellung bis zum siebenten Kapitel*), in welchem sich die Bedeutung einer solchen Summe auf einem verwandten Gebiet ergeben, und sich durch Anschauungen sowohl der Geometrie, als besonders der Statik fruchtreich gestalten wird.

§ 52, 53. **Multiplikation der Ausdehnungsgrössen.**

§ 52.

Dagegen dürfen wir unsere Aufgabe nicht fallen lassen, das in diesem und dem vorigen Kapitel gewonnene Gesetz von allen Schranken, in denen es noch zusammengeengt ist, zu befreien, und also auch die Beziehung der Multiplikation zu dieser Addition aufzufassen. Aber da die formelle Summe keine Ausdehnung darstellt, so ist auch das äussere Produkt jener formellen Summe in eine Strecke noch nicht seiner Bedeutung nach bestimmt. Nun muss auch diese wiederum formell durch das Fortbestehen der multiplikativen Beziehung bestimmt werden, und wir haben somit, wenn es überhaupt eine solche Multiplikation jener Summengrössen geben soll, dieselbe so zu definiren, dass

$$(A + B + C + \cdots) \,.\, p = A \,.\, p + B \,.\, p + C \,.\, p + \cdots$$

sei. Doch dürfen wir dies nur dann festsetzen, wenn bei dem Konstantbleiben von $A + B + C + \cdots$ auch $A \,.\, p + B \,.\, p + C \,.\, p + \cdots$
konstant bleibt, indem das Wesen der Summe nur in diesem | Kon- *81*
stantbleiben besteht, und das Princip der Gleichheit das gleichzeitige Konstantbleiben erfordert.

Also haben wir zu zeigen, dass, wenn

$$A + B + \cdots = P + Q + \cdots$$

ist, auch

$$A \,.\, p + B \,.\, p + \cdots = P \,.\, p + Q \,.\, p + \cdots$$

sein müsse. Dies ergiebt sich aber leicht, indem, wenn $A + B + \cdots$ 81
der Summe $P + Q + \cdots$ gleich gesetzt wird, und beides formelle Summen sind, durch blosse Anwendung der Additionsgesetze (andere Anordnung, Zusammenfassung der Stücke, Auflösung der Stücke in kleinere Stücke) aus der einen die andere hervorgehen muss. Da nun jeder solchen Veränderung, welche ohne Aenderung des Gesammtwerthes verstattet ist, eine ebensolche mit den um den Faktor p ver-

*) [Das heisst, dem zweiten Kapitel des zweiten Abschnitts].

mehrten Grössen entspricht, so wird, wenn man mit diesen die entsprechenden Operationen, wie mit jenen vornimmt, gleichzeitig, während sich $A + B + \cdots$ in $P + Q + \cdots$ verwandelt, auch $A . p + B . p + \cdots$ in $P . p + Q . p + \cdots$ übergehen. Somit wird es gestattet sein, jene Definition festzustellen, welche hiernach nichts ist, als eine abgekürzte Schreibart.

§ 53.

Da ferner, wenn mit mehreren Strecken fortschreitend, das heisst so multiplicirt wird, dass das jedesmal gewonnene Resultat mit dem nächstfolgenden Faktor multiplicirt wird, das Gesammtprodukt stets gleichen Werth behält, sobald das Produkt jener Strecken sich gleich bleibt, so können wir abkürzend statt jener Strecken, mit welchen fortschreitend multiplicirt ist, ihr Produkt setzen. Hierdurch ist der Begriff des Produktes zweier Ausdehnungen bestimmt, und so auch das Produkt einer formellen Summe in eine Ausdehnung, ein Produkt, was zwar im Allgemeinen wieder eine formelle Summe liefert, aber in besonderen Fällen auch in eine Ausdehnung übergehen kann*).

Dass nun nach dieser Bestimmung allgemein

$$(A + B) . P = A . P + B . P$$

82 ist, ergiebt sich leicht. Denn es sei $P = c . d \ldots$, so ist

$$(A + B) . P = (A + B) . c . d \ldots$$

nach der eben festgesetzten Bestimmung, ferner

$$(A + B) . c = A . c + B . c$$

nach § 52, also durch wiederholte Anwendung desselben Gesetzes

$$(A + B) . c . d \ldots = A . c . d \ldots + B . c . d \ldots,$$

das heisst

$$(A + B) . P = A . P + B . P.$$

82 Ist der zweite Faktor zerstückt, so lässt sich das entsprechende Gesetz hier nur für reale Summen nachweisen; für diese ergiebt sich aus obiger Gleichung durch Vertauschung (wobei die Zeichen sich entweder in allen Gliedern oder in keinem ändern)

$$P . (A + B) = P . A + P . B.$$

Für formelle Summen ist noch nichts über die Vertauschbarkeit der Faktoren festgesetzt und daher auch jene Schlussweise noch nicht

*) Nämlich, wenn die Stücke der Summe von n-ter Stufe sind und einem System $(n + m)$-ter Stufe angehören, so wird durch Multiplikation mit einer Ausdehnung $(m - 1)$-ter Stufe desselben Systemes offenbar die formelle Summe in eine Ausdehnung verwandelt.

anwendbar. Da wir überhaupt noch nichts über den Begriff eines Produktes, dessen zweiter Faktor eine formelle Summe ist, festgesetzt haben, so ist uns erlaubt für den Fall, dass der zweite Faktor eine formelle Summe ist, dieselbe Voraussetzung zu machen, wie für den Fall, wo der erste es ist, und also auch dann

$$P.(A+B)=P.A+P.B$$

zu setzen, und dies selbst auf den Fall zu übertragen, wo auch P eine formelle Summe darstellt.

§ 54, 55. **Hauptgesetze der äusseren Multiplikation.**

§ 54.

Nachdem wir nun alle bis dahin noch bestehenden Schranken aufgehoben, und die Geltung der multiplikativen Grundbeziehung für alle Ausdehnungsgrössen theils aus dem Begriffe nachgewiesen, theils durch Definitionen festgestellt haben: so gelten somit alle Gesetze dieser Beziehung, wie auch alle Gesetze der Addition und Subtraktion, und es sind auf diese Weise alle angegebenen Begriffe im allgemeinsten Sinne gerechtfertigt. Wir fassen daher, nachdem wir am Schlusse dieser Entwickelungsreihe angelangt sind, die Resultate derselben in folgenden Sätzen zusammen:

*Wenn alle Elemente einer Ausdehnung (in ihrer elementaren Darstellung *)) einer und derselben Erzeugung unterworfen [werden], das heisst*
statt jedes Elementes eine gleiche Strecke gesetzt wird, | deren Anfangselement 83
jenes Element ist, so ist die Gesammtheit der so gewonnenen Elemente die konkrete Darstellung einer Ausdehnung, welche, als Theil des zugehörigen Systems aufgefasst, das Produkt jener Ausdehnung in diese Strecke ist, und wir nannten dasselbe ein äusseres.

Ferner:

Wenn man eine Ausdehnung mit den einfachen Faktoren einer an-
dern fortschreitend auf die angegebene Weise | multiplicirt, so ist das Re- 83
sultat als Produkt jener ersten Ausdehnung in diese letzte charakterisirt.

Als Summe zweier Ausdehnungen n-ter Stufe in einem Systeme $(n+1)$-ter Stufe wurde diejenige Ausdehnung nachgewiesen, welche hervorgeht, wenn man jene beiden auf einen gemeinschaftlichen Faktor $(n-1)$-ter Stufe brachte, und die ungleichen Faktoren addirte.

Als Summe zweier Ausdehnungen n-ter Stufe in einem System von höherer als $(n+1)$-ter Stufe ergab sich die formelle Summengrösse, welche dasjenige darstellte, was bei Anwendung der Additionsgesetze konstant blieb.

*) Unter der elementaren oder konkreten Darstellung einer Ausdehnung verstehen wir das Gebilde, welchem diese Ausdehnung zugehört.

Endlich als Produkt einer Summengrösse in eine andere Grösse wurde die Summe aufgefasst, welche hervorgeht, wenn jedes Stück des einen Faktors mit jedem des andern multiplicirt, und diese Produkte addirt werden.

Die Gültigkeit aller dieser Bestimmungen wurde dadurch dargethan, dass für die Addition die Grundgesetze derselben und für die Multiplikation die Grundbeziehungen derselben zur Addition nachgewiesen wurden, indem darin zugleich der Nachweis lag, dass alle Gesetze der Addition und Subtraktion und der Beziehung der Multiplikation zu beiden hier noch fortbestehen.

§ 55.

Es bleibt uns nur noch übrig, die Gesetze, welche die **äussere** Multiplikation als solche charakterisiren, in allgemeinerer Form zu entwickeln.

Wir hatten oben in § 34 als das Eigenthümliche dieser Art der Multiplikation das Gesetz dargestellt, dass man, wenn ein einfacher Faktor eines Produktes einen Summanden enthält, welcher mit einem der angränzenden Faktoren gleichartig ist, diesen Summanden ohne Werthänderung des Produktes weglassen kann; daraus ergab sich (§ 35, 36), dass das Produkt von n einfachen Faktoren stets dann, aber
84 auch nur dann als null erscheint, wenn | sie von einander abhängig sind, das heisst von einem Systeme niederer Stufe als der n-ten umfasst werden. Dies können wir unmittelbar auf Faktoren beliebiger Stufen ausdehnen, wenn wir mehrere Ausdehnungen dann von einander abhängig setzen, wenn die Summe ihrer Stufenzahlen grösser ist als die des Systems, welches sie alle umfasst; denn dann wird die An-
84 zahl der einfachen Faktoren, welche | ihr Produkt enthält, grösser sein als die Stufenzahl des umfassenden Systems, also ihr Produkt in der That null sein. Also:

Das äussere Produkt ist null, wenn die Faktoren von einander abhängig sind, und hat einen geltenden Werth, wenn sie es nicht sind.

Aus der Eigenthümlichkeit des äusseren Produktes ergab sich uns (§ 35), dass zwei einfache Faktoren vertauscht werden dürfen, wenn man zugleich das Vorzeichen des Produktes ändert; dies Gesetz erweiterten wir dahin, dass ein einfacher Faktor eine gerade Anzahl von einfachen Faktoren **ohne**, eine ungerade **mit Zeichenwechsel** überspringen dürfe. Da eine Reihe von einfachen Faktoren als Ausdehnung erschien, deren Stufenzahl der Anzahl jener einfachen Faktoren gleich ist, so folgt daraus zuerst, dass eine Ausdehnung von gerader Stufe einen einfachen Faktor, also auch jeden andern, ohne Zeichenwechsel

überspringen dürfe, und wiederum, dass bei Vertauschung zweier beliebiger auf einander folgender Faktoren dann und nur dann Zeichenwechsel eintrete, wenn beide von ungerader Stufe sind.*) Dass nun
dies Gesetz auch noch für | Summengrössen gelte, ist klar, indem es, 85
wenn man mit den einzelnen Stücken durchmultiplicirt, für die einzelnen Produkte gelten muss, also auch für deren Summe. Also:
*Zwei auf einander folgende Faktoren sind **mit** oder **ohne** | Zeichen-* 85
wechsel vertauschbar, je nachdem die Stufenzahlen beider Faktoren zugleich ungerade sind oder nicht.

B. Anwendungen.

§ 56. **Erzeugnisse der Fortbewegung im Raume.**

Die in diesem Kapitel entwickelten Gesetze lassen gegenwärtig nur eine theilweise Anwendung auf die Geometrie und Statik zu, indem die Summengrösse, welche zuerst in einem System vierter Stufe auftritt, hier keine Anwendung finden kann. Die Anwendungen beschränken sich daher nur auf die erste Hälfte dieses Kapitels (§ 47—50), und bestehen darin, dass die Gesetze, welche im vorigen Kapitel für jene Disciplinen festgestellt wurden, von ihren Schranken befreit und von einem allgemeineren Gesichtspunkte angeschaut werden.

Zuerst in der Geometrie haben wir den neuen Additionsbegriff auf die Flächenräume (als Ausdehnungen zweiter Stufe) zu übertragen.

Doch müssen wir dann an den Flächenräumen ihre Richtungen, das heisst die Richtungen der Ebene, welcher sie angehören, festhalten,

---

*) Es lässt sich dies, wenn a und b die beziehlichen Stufenzahlen der Ausdehnungen A und B sind, so ausdrücken, dass $A \,.\, B = (-1)^{ab}\, B \,.\, A$ sei. — Wenn beide Faktoren noch durch einen dritten Faktor getrennt sind, so hängt bei der Vertauschung das Zeichen noch von diesem ab. So hat man zum Beispiel

$$A \,.\, B \,.\, C = (-1)^{ab+bc+ca}\, C \,.\, B \,.\, A.$$

Für die formelle Auffassung der äusseren Multiplikation bemerke ich noch, dass man ihre Eigenthümlichkeit, wenn einmal die multiplikative Beziehung zur Addition festgestellt ist, auch durch das Gesetz, dass zwei einfache Faktoren mit Zeichenwechsel vertauschbar seien, vollkommen hätte charakterisiren können. Denn ist $a \,.\, b$ allgemein gleich $-b \,.\, a$, oder

$$a \,.\, b + b \,.\, a = 0,$$

so muss dies auch noch gelten, wenn $b = a$ wird, dann ist $a \,.\, a + a \,.\, a = 0$, also $2a \,.\, a = 0$ oder $a \,.\, a = 0$. Daraus folgt dann, dass überhaupt das Produkt zweier gleichartiger Strecken null sei, woraus dann das den Begriff der äusseren Multiplikation charakterisirende Gesetz, wie wir es oben darstellten, hervorgeht.

und also zwei Flächenräume als ungleichartig auffassen, wenn die Ebenen, denen sie angehören, eine Verschiedenheit in den Richtungen darbieten. Da nun die Flächenräume, auf diese Weise aufgefasst, Ausdehnungen zweiter Stufe sind, so werden sich zwei Flächenräume, da sie zugleich einem und demselben Systeme dritter Stufe (dem Raume) angehören, nach § 48 auf einen gemeinschaftlichen Faktor erster Stufe bringen, das heisst sich als Spathecke (Parallelogramme) von gleicher Grundseite darstellen lassen. Die Summe derselben wird somit ein Spatheck sein, welches dieselbe Grundseite hat, dessen Höhenseite [vgl. S. 91] aber die Summe der beiden Höhenseiten jener Spathecke ist. Hiernach kann man nun die Sätze von der Fortbewegung (§ 28 und 29) allgemeiner so aussprechen:

86 *Die geometrische*) Summe der Flächenräume, welche eine | gebrochene Linie bei ihrer Fortbewegung beschreibt, ist gleich dem Flächenraum, welchen eine gerade Linie, die mit jener gebrochenen gleichen Anfangspunkt und Endpunkt hat, beschreibt, wenn sie sich auf gleiche Weise fortbewegt,*

oder noch allgemeiner, indem wir die Strecke vom Anfangspunkt
86 zum Endpunkt der gebrochenen Linie die schliessende Seite derselben nennen:

Die geometrische Summe der Flächenräume, welche eine gebrochene Linie bei gebrochener Bahn beschreibt, ist gleich dem Flächenraum, welchen die Seite, die die erstere schliesst, in einer Bahn beschreibt, die die zweite schliesst.

Für die Bewegung der Flächenräume hat man den Satz:

Die Summe der Körperräume, welche eine beliebig gebrochene Fläche in beliebig gebrochener Bahn beschreibt, ist gleich dem Körperraum, welchen die geometrische Summe jener Flächenräume (die die gebrochene Fläche bilden) in der jene gebrochene schliessenden Bahn beschreibt.

§ 57. Allgemeiner Begriff des Gesammtmomentes.

Auch für die Statik und Mechanik besteht die Anwendung dieses Kapitels in einer Erweiterung, welche jedoch hier so fruchtreich ist, dass nun erst der ganze Reichthum der Beziehungen hervortreten kann.

Zuerst die Beschränkung, welche bei dem Gesammtmoment mehrerer Kräfte in Bezug auf einen Punkt hinzugefügt wurde (§ 41), fällt jetzt weg, und wir können daher sagen, unter dem Gesammtmoment

---

*) Dieses Adjektivs bediene ich mich, wenn die zu summirenden Grössen noch nicht hinreichend als Grössen mit konstanter Richtung bezeichnet sind, um die Summe von der rein arithmetischen Summe zu unterscheiden.

mehrerer Kräfte in Bezug auf einen Punkt sei die Summe aller einzelnen auf jenen Punkt bezüglichen Momente verstanden; und zugleich ist klar, dass, wenn man durch diesen Punkt eine Strecke als Axe zieht, das Moment in Bezug auf diese Axe gefunden wird, wenn man diese Axe in jenes erste Moment multiplicirt. Sind zum Beispiel $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, ... die Kräfte, so ist ihr Gesammtmoment M_ϱ in Bezug auf einen Punkt ϱ gleich

$$[\varrho\alpha] \, . \, [\alpha\beta] + [\varrho\gamma] \, . \, [\gamma\delta] + \cdots;$$

und in Bezug auf eine Axe $\sigma\varrho$ ist das Moment derselben Kräfte gleich

$$[\sigma\varrho] \, . \, [\varrho\alpha] \, . \, [\alpha\beta] + [\sigma\varrho] \, . \, [\varrho\gamma] \, . \, [\gamma\delta] + \cdots$$

oder gleich

$$[\sigma\varrho] \, . \, M_\varrho.$$

Dass nun auch hier das Gesammtmoment der innern Kräfte in *87*
Bezug auf einen beliebigen Punkt null ist, bedarf wohl kaum eines Beweises, indem sogleich einleuchtet, dass der Beweis auf ähnliche Weise, nur noch einfacher, erfolgt, wie der oben (§ 42) für den beschränkteren Begriff geführte. Und damit ist klar, wie die sämmtlichen oben aufgestellten Sätze (§ 43 und 44) auch in dieser | Verall- 87
gemeinerung noch gelten. Namentlich wird der in § 43 aufgestellte Hauptsatz jetzt so ausgesprochen werden können:

Das Gesammtmoment aller Bewegungen, welche den einzelnen Punkten (eines Vereins von Punkten) innerhalb eines Zeitraums mitgetheilt werden, ist gleich dem Gesammtmoment der sämmtlichen Kräfte, welche dem Vereine dieser Punkte während jener Zeit von aussen mitgetheilt werden, und zwar in Bezug auf jeden beliebigen Punkt. *)

Wirken also namentlich keine Kräfte von aussen ein, so muss auch das Gesammtmoment aller mitgetheilten Bewegungen während jedes Zeitraumes null sein, das heisst das Gesammtmoment aller Bewegungen, welche den Punkten einwohnen, muss in der Zeit konstant sein. **) Dies Gesammtmoment stellt somit eine unveränderliche Ebene und in derselben einen konstanten Flächenraum dar; jene Ebene ist es, welche *La Place* die unveränderliche Ebene (*plan invariable*) nennt, und welche vermittelst unserer Wissenschaft sich auf die einfachste Weise durch Summation ergiebt. Die Schwierigkeit der Ableitung nach den sonst üblichen Methoden übersieht sich leicht, wenn man nur

---

*) Die daraus hervorgehende Gleichung werden wir späterhin bei der Anwendung der Differenzialrechnung auf unsre Wissenschaft darstellen; s. § 105.

**) Es ist dies, wie man sich leicht überzeugt, das Princip der konstanten Flächenräume.

einen Blick wirft auf die in *La Grange's Mécanique analytique* *) oder in *La Place's Mécanique céleste* geführten Entwickelungen, und auf die komplicirten Formeln, in welchen dort die Darstellung fortschreitet.

§ 58, 59. **Abhängigkeit der Momente.**

§ 58.

Wir könnten zwar schon hier die Hauptsätze für die Theorie der Momente aufstellen; da indessen die Betrachtung der Momente im
88 zweiten Abschnitte sich noch weit einfacher gestalten | wird, so will
ich hier nur ein Paar Beispiele geben, um zu zeigen, mit welcher Leichtigkeit sich durch Hülfe unserer Analyse die hierhergehörigen Aufgaben lösen lassen, und in welcher Ergiebigkeit die interessantesten Sätze daraus gleichsam hervorsprudeln.

Zuerst sei die Aufgabe die, aus dem Momente in Bezug auf einen
88 Punkt das in Bezug auf einen andern um eine Strecke von | gegebener
Länge und Richtung von ihm entfernten Punkt zu finden, wenn ausserdem die Gesammtkraft (die Summe der als Strecken dargestellten Kräfte) ihrer Länge und Richtung nach gegeben ist. Es seien σ und τ die beiden Punkte, M_σ das gegebene auf den ersten Punkt bezügliche, M_τ das auf den zweiten bezügliche Moment, $[\alpha\beta]$, $[\gamma\delta]$, ... die Kräfte, α, γ, ... ihre Angriffspunkte, s die Gesammtkraft ihrer Länge und Richtung nach, also

$$s = [\alpha\beta] + [\gamma\delta] + \cdots.$$

Dann ist

$$M_\sigma = [\sigma\alpha] . [\alpha\beta] + [\sigma\gamma] . [\gamma\delta] + \cdots$$
$$M_\tau = [\tau\alpha] . [\alpha\beta] + [\tau\gamma] . [\gamma\delta] + \cdots.$$

Zieht man beide Gleichungen von einander ab, so erhält man, da

$$[\sigma\alpha] - [\tau\alpha] = [\sigma\alpha] + [\alpha\tau] = [\sigma\tau]$$

ist, und so weiter, die Gleichung

$$M_\sigma - M_\tau = [\sigma\tau] . ([\alpha\beta] + [\gamma\delta] + \cdots) = [\sigma\tau] . s,$$

wodurch die Aufgabe gelöst ist, und man hat den Satz gewonnen:

Rückt der Beziehungspunkt um eine Strecke fort, so nimmt das Moment um das äussere Produkt der Gesammtkraft in diese Strecke zu. **)

Hierin liegt zugleich, dass das Moment dasselbe bleibt, wenn jenes

---

*) P. 262—269 [II partie, section III, § 2, No. 7—11].

**) Hierbei ist das Wort „zunehmen" in demselben allgemeinen Sinne genommen, in welchem man auch sagen kann, 8 habe um (— 3) zugenommen, wenn 5 daraus geworden ist.

äussere Produkt null ist, das heisst wenn der Beziehungspunkt in der Richtung der Gesammtkraft fortschreitet, oder anders ausgedrückt, dass

die Momente in Bezug auf alle Punkte, welche in einer und derselben mit der Gesammtkraft parallelen Linie liegen, einander gleich sind.

Ferner:

Ist das Moment in Bezug auf irgend einen Punkt null, so ist | es 89
in Bezug auf jeden andern Punkt gleich dem äusseren Produkt der Gesammtkraft in die Abweichung des letzten Punktes von dem ersten.

§ 59.

Eine andere Aufgabe, welche die Abhängigkeit der Momente in
Bezug auf Axen, die durch denselben Punkt gehen, auffasst, | ist die, 89
aus den Momenten in Bezug auf drei Axen, die durch einen Punkt gehen und nicht in derselben Ebene liegen, das Moment in Bezug auf jede vierte Axe, die durch denselben Punkt geht, zu finden.

Es seien a, b, c die drei Axen, A, B, C die auf sie bezüglichen Momente, $\alpha a + \beta b + \gamma c$, wo α, β, γ Zahlen vorstellen, die vierte Axe, deren zugehöriges Moment D gesucht wird.*) Das Moment in Bezug auf den Durchschnitt der drei Axen sei M, so ist nach § 57

$$A = a \,.\, M, \quad B = b \,.\, M, \quad C = c \,.\, M,$$
$$D = (\alpha a + \beta b + \gamma c) \,.\, M.$$

Lösen wir in dem letzten Ausdrucke die Klammer auf, so wird

$$\begin{aligned} D &= \alpha a \,.\, M + \beta b \,.\, M + \gamma c \,.\, M \\ &= \alpha A + \beta B + \gamma C. \end{aligned}$$

Dies Resultat in Worten ausgedrückt:

*Aus den Momenten dreier Axen, die durch Einen Punkt gehen, ohne in Einer Ebene zu liegen, kann man das jeder andern Axe, die durch denselben Punkt geht, finden; und zwar herrscht zwischen den Momenten dieselbe Vielfachen-Gleichung, wie zwischen den Axen.***)

Wenn einer der Koefficienten null wird, so hat man den Satz:

Aus den Momenten zweier Axen, die durch einen Punkt gehen, kann man das jeder andern Axe, die durch denselben Punkt geht, finden, und

---

*) Dass sich jede Strecke im Raume als Summe aus drei Stücken darstellen lässt, welche drei gegebenen Strecken parallel sind, ist oben gezeigt; darin liegt, dass sie sich als Vielfachensumme derselben darstellen lässt.

**) Der Kürze wegen sagen wir, zwischen Grössen bestehe eine Vielfachen-Gleichung, wenn die Glieder der Gleichung nur Vielfache jener Grössen darstellen.

zwar herrscht zwischen den Momenten dieselbe Vielfachen-Gleichung, wie zwischen den Axen.

Wir werden späterhin bei der allgemeineren Behandlung der Momente auch diesen Satz in viel allgemeinerer Form darstellen können.

Viertes Kapitel.

Aeussere Division, Zahlengrösse.

A. Theoretische Entwickelung.

§ 60. Begriff der äusseren Division.

90 Die zur Multiplikation gehörige analytische Verknüpfung ist die Division; folglich wird nach dem allgemeinen Begriff der analytischen Verknüpfung (§ 5) das Dividiren darin bestehen, dass man zu dem Produkte und dem einen Faktor den andern sucht; und es wird vermöge dieser Erklärung jeder besonderen Art der Multiplikation eine ihr zugehörige Art der Division entsprechen; die äussere Division wird also darin bestehen, dass man zu dem äusseren Produkt und dem einen Faktor desselben den andern sucht.

Es ist klar, dass hier, da die Faktoren des äusseren Produktes im Allgemeinen nicht vertauschbar sind, auch zwei Arten der Division zu unterscheiden sind, je nachdem nämlich der erste Faktor gegeben ist oder der zweite (vgl. § 11). Wir bezeichnen den gesuchten Faktor (Quotienten) so, dass wir das gegebene Produkt A (den Dividend) nach gewöhnlicher Weise über den Divisionsstrich, den gegebenen Faktor B (den Divisor) unter denselben setzen, diesem gegebenen Faktor aber einen Punkt folgen oder vorangehen lassen, je nachdem der gesuchte Faktor als folgender oder vorangehender Faktor aufgefasst werden soll. Also $\frac{A}{B.}$ bedeutet den Faktor C, welcher als zweiter Faktor mit B verknüpft A giebt, also welcher der Gleichung genügt:

$$B\,.\,C = A;$$

und $\frac{A}{.B}$ bedeutet den Faktor C, welcher als erster Faktor mit B verknüpft A giebt, das heisst der Gleichung genügt:

$$C\,.\,B = A;$$

oder beide Bestimmungen durch blosse Formeln ausgedrückt:

$$B \cdot \frac{A}{B.} = A; \qquad \frac{A}{.B} \cdot B = A.$$

Hierbei haben wir dann nur festzuhalten, dass, wenn die Stufenzahlen von der Art sind, dass die Faktoren direkt vertauschbar sind,
beide Quotienten gleichen Werth haben, wenn sie hingegen | nur mit 91
Zeichenwechsel vertauschbar sind, beide Quotienten | entgegengesetzten 91
Werth haben.*) Daher wird man im ersteren Falle auch das Zeichen des Punktes im Nenner weglassen können, wenn man nicht etwa die Division noch ins Besondere als äussere bezeichnen will.

§ 61, 62. **Realität und Vieldeutigkeit des Quotienten.**

§ 61.

Es kommt nun darauf an, aus der formellen Bestimmung die wesentliche Bedeutung des Quotienten zu ermitteln.

Da das äussere Produkt zweier Ausdehnungen stets eine Ausdehnung giebt, welcher jene beiden untergeordnet sind und deren Stufenzahl die Summe ist aus den Stufenzahlen der Faktoren, so folgt zunächst, dass auch der Quotient nur dann eine Ausdehnung darstellen könne, wenn der Divisor dem Dividend untergeordnet ist, das heisst von dem System des Dividend ganz umfasst wird; und dass dann zugleich der Divisor von niederer Stufe sein muss als der Dividend, die Stufenzahl des Quotienten aber die Differenz ist zwischen denen des Dividend und Divisors. In jedem andern Falle kann also der Quotient keine Ausdehnung darstellen, sondern nur eine formelle Bedeutung haben, die wir vorläufig auf sich beruhen lassen. Umgekehrt zeigt sich aber auch, dass der Quotient jedesmal dann eine Ausdehnung darstellen muss, wenn jene Bedingung erfüllt ist, dass nämlich der Divisor dem Dividend untergeordnet sei. Nämlich nach § 48 kann man jede Ausdehnung n-ter Stufe auf $(n - 1)$ beliebige ihr untergeordnete Faktoren bringen, sobald diese nur von einander unabhängig sind, und somit kann man sie auch auf jede geringere Anzahl untergeordneter Faktoren bringen, das heisst sie als Produkt darstellen, dessen einer Faktor eine beliebige ihr untergeordnete Ausdehnung ist. Also

Der Quotient ist nur dann, aber auch stets dann, eine Ausdehnung, wenn der Divisor dem Dividend untergeordnet und von niederer Stufe ist, und zwar ist seine Stufenzahl dann der Unterschied der beiden Stufenzahlen des Dividend und Divisors.

---

*) Da die Vertauschung der Faktoren nur dann einen Zeichenwechsel erfordert, wenn beide von ungerader Stufenzahl sind, das Produkt also von gerader, so werden auch beide Quotienten nur dann entgegengesetzten Werth haben, wenn der Dividend von gerader, der Divisor von ungerader Stufe ist; in jedem andern Falle werden sie gleichen Werth haben.

§ 62.

92 Es bleibt nun zu untersuchen, ob in diesem Falle der Quotient
92 eindeutig ist, oder mehrdeutig, und wie im letztern Falle | die Gesammtheit seiner Werthe gefunden werden kann.

Es sei $\frac{A}{B.}$ der zu untersuchende Quotient, und B der Grösse A untergeordnet. Nach dem vorigen Paragraphen giebt es nun allemal eine Ausdehnung, welche mit B multiplicirt A giebt, das heisst welche als Quotient aufgefasst werden kann; es sei C eine solche, so dass also

$$B.C = A$$

ist, und die Frage ist die, ob es noch andere von C verschiedene Ausdehnungen gebe, welche statt C in diese Gleichung gesetzt werden können. Jedenfalls müssten dieselben von derselben Stufe sein wie C (§ 61). Jede von C verschiedene Ausdehnung derselben Stufe wird sich, wenn X eine beliebige Grösse derselben Stufe ist, darstellen lassen in der Form $C + X$, und es ist also X so zu bestimmen, dass

$$B.(C + X) = A$$

ist, wenn $C + X$ auch als ein Werth des Quotienten $\frac{A}{B.}$ erscheinen soll. Man hat dann

$$B.C + B.X = A = B.C,$$

das heisst

$$B.X = 0.$$

Nun giebt aber nach § 55 nur das Produkt zweier abhängiger Grössen, aber ein solches auch allemal Null, folglich genügt ausser dem partiellen Werth C des Quotienten noch jede andere Grösse, welche von ihm um einen vom Divisor abhängigen Summanden verschieden ist, aber auch keine andere. Die Gesammtheit dieser Grössen, die von B abhängig sind, oder welche statt X gesetzt der Gleichung

$$B.X = 0$$

genügen, können wir nun nach der Definition des Quotienten mit $\frac{0}{B}$ bezeichnen; somit haben wir

$$\frac{B.C}{B.} = C + \frac{0}{B}.$$

Dies Resultat können wir in folgendem Satze darstellen:

93 *Wenn der Divisor (B) dem Dividend (A) untergeordnet und von*
93 *niederer Stufe ist, so ist der Quotient nur partiell bestimmt, | und zwar findet man, wenn man einen besonderen Werth (C) des Quotienten kennt, den allgemeinen, indem man den unbestimmten Ausdruck einer von dem*

Divisor (B) abhängigen Grösse zu jenem besondern Werth hinzuaddirt, oder es ist dann

$$\frac{A}{B.} = C + \frac{0}{B}.\text{*)}$$

Auf die Raumlehre übertragen, sagt dieser Satz aus, dass erstens, wenn zu einem Spathecke (Parallelogramme) die Grundseite und der Flächenraum (nebst der Ebene, der er angehören soll) gegeben ist, dann die andere Seite, die wir Höhenseite genannt haben, nur partiell bestimmt sei, und dass, wenn ihr Anfangspunkt fest ist, der Ort ihres Endpunktes eine mit der Grundseite parallele gerade Linie sei; dass zweitens, wenn zu einem Spathe die Grundfläche und der Körperraum gegeben ist, die andere Seite (Höhenseite) nur partiell bestimmt sei, und der Ort ihres Endpunktes bei festem Anfangspunkt eine mit der Grundfläche parallele Ebene sei; und dass endlich, wenn zu einem Spathe die Höhenseite und der Körperraum gegeben ist, die Grundfläche partiell bestimmt sei, indem dieselbe als der veränderliche ebene Durchschnitt eines Prismas, dessen Kanten der Höhenseite parallel sind, erscheint.

Dies letztere bedarf eines Nachweises. Ist nämlich eine Grundfläche als besonderer Werth jenes Quotienten gefunden, das heisst giebt sie wirklich mit der gegebenen Höhenseite äusserlich multiplicirt den gegebenen Körperraum, und stellt man sich diese Grundfläche in Form eines Spathecks vor, so wird man jedes andere Spatheck, was mit der gegebenen Höhenseite äusserlich multiplicirt dasselbe Produkt giebt, dadurch aus dem ersten gewinnen, dass man den Seiten des ersten beliebige mit der Höhenseite parallele Summanden hinzufügt, worin dann der ausgesprochene Satz liegt.

§ 63, 64. **Ausdruck für den eindeutigen Quotienten.**

§ 63.

Aus dem Satze des vorigen Paragraphen ergiebt sich, dass man
die Gesetze der arithmetischen Division nicht ohne weiteres auf | unsere *94*
Wissenschaft übertragen könne, namentlich dass man im Dividend | und 94
Divisor nicht gleiche Faktoren wegheben dürfe. Aber da überhaupt die Rechnung mit unbestimmten, wenn auch nur partiell unbestimmten Grössen, mannigfachen Schwierigkeiten unterliegt, und in der ander-

*) Es ist dies unbestimmte Glied sehr wohl zu vergleichen mit der unbestimmten Konstanten bei der Integration, und das eigenthümliche Verfahren, welches dadurch herbeigeführt wird, ist hier dasselbe wie dort.**)

**) Vergleiche die Anm. zu S. 39 und 43. (1877.)

weitigen Analyse des Endlichen nichts vollkommen entsprechendes findet, so ist es am zweckmässigsten, diesen unbestimmten Ausdruck durch bestimmte Ausdrücke zu ersetzen.

Es ergiebt sich nämlich, dass der Quotient ein bestimmter ist, sobald derselbe seiner Art nach gegeben, das heisst das System gleicher Stufe bestimmt ist, dem er angehören soll, vorausgesetzt nämlich, dass dies System von dem des Divisors unabhängig, dem Systeme des Dividend aber untergeordnet sei. Wird diese Voraussetzung erfüllt, so ist in der That immer ein, aber auch nur Ein Werth des Quotienten möglich, welcher in dem gegebenen Systeme liegt. Denn denkt man sich irgend eine diesem Systeme gleichartige Ausdehnung (C) mit dem Divisor multiplicirt, so wird das Produkt dem Dividend gleichartig sein, also auch durch Vergrösserung oder Verkleinerung jener Ausdehnung (C) dem Dividend gleich gemacht werden können, wobei diese Ausdehnung (C) selbst sich als Quotient darstellt. Aber auch nur Ein solcher Werth des Quotienten wird hervorgehen. Es sei nämlich C ein solcher Werth des Quotienten $\frac{A}{B\,.}$, so dass also $B\,.\,C = A$ ist; es verwandle sich C in eine ihm gleichartige Grösse $C + C_1$, wo C_1 nicht gleich Null ist, so hat man

$$B\,.\,(C + C_1) = B\,.\,C + B\,.\,C_1 = A + B\,.\,C_1\,;$$

es ist also $B\,.(C + C_1)$ nicht gleich A, da $B\,.\,C_1$, weil beide Faktoren nach der Voraussetzung von einander unabhängig sind, nicht Null geben kann. Also jeder andere mit C gleichartige Werth genügt statt C gesetzt nicht der Gleichung

$$B\,.\,C = A\,,$$

das heisst, kann nicht als ein Werth des Quotienten $\frac{A}{B\,.}$ aufgefasst werden; also giebt es nur einen solchen.

Dies Resultat kann man auch so ausdrücken: Wenn zwei gleiche Produkte einen gleichen Faktor haben, und der andere Faktor in beiden gleichartig, von dem ersten aber unabhängig ist, so ist auch dieser in beiden gleich.

95 Es kommt nun darauf an, für diesen bestimmten Quotienten eine angemessene Bezeichnung zu finden. Es sei P der Dividend, A der
95 Divisor, B | eine Grösse, welcher der Quotient gleichartig sein soll, A und B seien beide dem Systeme P untergeordnet, aber von einander unabhängig; dann wird P sich als Produkt von A_1 in B, wo A_1 mit A gleichartig ist, darstellen lassen, der Quotient wird also

$$\frac{A_1\,.\,B}{A\,.}$$

sein; diesen können wir, sofern er mit B gleichartig sein soll, vorläufig mit

$$\frac{A_1}{A} B$$

bezeichnen. Also $\frac{A_1}{A} B$ soll die mit B gleichartige Grösse B_1 bezeichnen, welche der Gleichung

$$A_1 . B = A . B_1$$

genügt.*)

§ 64.

Um nun die Bedeutung dieser Ausdrücke auszumitteln, haben wir die Verbindung eines und desselben Ausdrucks | $\frac{A_1}{A}$ mit verschiedenen 96
Grössen zu untersuchen.

Zunächst ergiebt sich, dass, *wenn A, B, C von einander unabhängig sind*, und

$$\frac{A_1}{A} B = B_1$$

ist, dann auch allemal

$$\frac{A_1}{A} C = \frac{B_1}{B} C$$

sein muss. Denn aus der ersten Gleichung hat man nach der Definition

$$A_1 . B = A . B_1,$$

---

*) Die Bezeichnung kann keine Zweideutigkeit hervorrufen, da wir bisher noch nicht einen Quotienten zweier gleichartiger Grössen kennen gelernt haben. Dabei bleibt vorläufig unentschieden, ob in dieser Bezeichnung $\frac{A_1}{A}$ in der That als Quotient und seine Verbindung mit B als Multiplikation aufzufassen sei; doch wird die Angemessenheit der Bezeichnung erst dann klar werden können, wenn wirklich jene Auffassung sich herausstellt. Durch einen Seitenblick auf die Zahlenlehre, mit welcher hier unsere Wissenschaft in Berührung tritt, ohne aber von ihr Sätze zu entlehnen, leuchtet ein, dass wenn A_1 ein Vielfaches von A ist, auch B_1 ein eben so Vielfaches von B sein müsse, und dass also, wenn wir unter $\frac{A_1}{A}$ die Zahl verstehen, welche angiebt, ein Wievielfaches A_1 von A sei, dann B_1 in der Form $\frac{A_1}{A} B$ dargestellt werden könne. Allein so einfach diese Anwendung der Zahlenlehre auch sein mag, so dürfen wir sie hier nicht aufnehmen, ohne unserer Wissenschaft zu schaden. Auch würde sich dieser Verrath an unserer Wissenschaft bald genug rächen durch die mannigfachen Verwickelungen und Schwierigkeiten, in die wir sehr bald durch den Begriff der Irrationalität gerathen würden. Wir bleiben daher, ohne uns durch die betrügerische Aussicht auf einen bequemen Weg verlocken zu lassen, unserer Wissenschaft getreu.

und setzt man $\frac{A_1}{A} C = C_1$, so ist

$$A_1 . C = A . C_1 .$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit C, die zweite mit B (auf zweiter Stelle), so hat man

$$A_1 . B . C = A . B_1 . C,$$
$$A_1 . B . C = A . B . C_1,$$

also auch

$$A . B_1 . C = A . B . C_1 .$$

Da nun $B_1 . C$ mit $B . C_1$ gleichartig ist, und der andere Faktor (A) sowohl, als das Produkt auf beiden Seiten gleich ist, so muss (§ 63)

$$B_1 . C = B . C_1,$$

das heisst

$$\frac{B_1}{B} C = C_1 = \frac{A_1}{A} C$$

sein. Also wenn

$$\frac{A_1}{A} B = B_1$$

ist, so geben die Ausdrücke $\frac{A_1}{A}$ und $\frac{B_1}{B}$ mit jeder beliebigen von $A . B$ unabhängigen Grösse verbunden dasselbe Resultat.

Aber wir können nun zeigen, dass dies auch dann noch der Fall sein müsse, *wenn beide Ausdrücke mit einer Grösse C verbunden sind, welche nur von A und von B unabhängig ist, ohne zugleich von dem Produkte $A . B$ unabhängig zu sein.*

Zunächst erweisen wir dies für den Fall, dass C eine Strecke sei, die wir mit c bezeichnen wollen. Es sei also

97 $$\frac{A_1}{A} c = c_1$$

oder

$$A_1 . c = A . c_1 ,$$

wo c zwar von A und B unabhängig, aber von $A . B$ abhängig sei. Um nun zu zeigen, dass dann, wenn

$$\frac{A_1}{A} B = B_1$$

ist, auch

$$\frac{B_1}{B} c = \frac{A_1}{A} c = c_1$$

sein müsse, suchen wir den Faktor c durch Hinzufügung einer von $A . B$ unabhängigen Strecke p selbst davon unabhängig zu machen. Man erhält dann statt $A_1 . c$ den Ausdruck $A_1 . (c + p)$; diesem wird ein Ausdruck gleichgesetzt werden können, dessen erster Faktor A [ist], und dessen zweiter mit $(c+p)$ gleichartig ist und also als Summe zweier mit c und p gleichartiger Stücke dargestellt werden kann. Es sei derselbe $c_2 + p_1$, so hat man

$$A_1 \,.\, (c+p) = A \,.\, (c_2 + p_1).$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit p, so erhält man

$$A_1 \,.\, c \,.\, p = A \,.\, c_2 \,.\, p$$

oder, da $A_1 \,.\, c = A \,.\, c_1$ ist,

$$A \,.\, c_1 \,.\, p = A \,.\, c_2 \,.\, p,$$

und daraus folgt, da die entsprechenden Faktoren gleichartig sind, nach § 63 die Gleichung

$$c_1 = c_2.$$

Führt man daher statt c_2 diesen Werth c_1 oben ein, so erhält man

$$A_1 \,.\, (c+p) = A \,.\, (c_1 + p_1).$$

Und da nun p von $A \,.\, B$ unabhängig war, also auch $(c+p)$ davon unabhängig ist, so können wir nun das oben erwiesene Gesetz anwenden, dass

$$B_1 \,.\, (c+p) = B \,.\, (c_1 + p_1)$$

ist; also auch, mit p multiplicirt,

$$B_1 \,.\, c \,.\, p = B \,.\, c_1 \,.\, p;$$

und da hier die entsprechenden Faktoren gleichartig sind, so hat man

$$B_1 \,.\, c = B \,.\, c_1$$

oder

$$\frac{B_1}{B}\, c = c_1 = \frac{A_1}{A}\, c$$

auch dann noch, wenn c von $A \,.\, B$ abhängig ist.

Nun können wir dies Resultat leicht ausdehnen auf den Fall, dass die Ausdrücke $\frac{A_1}{A}$ und $\frac{B_1}{B}$, welche der Gleichung

$$\frac{A_1}{A}\, B = B_1 \quad \text{oder} \quad A_1 \,.\, B = A \,.\, B_1$$ 98

entsprechen, mit einer beliebigen von A und von B unabhängigen 98
Grösse höherer Stufe C verbunden sind. Es sei $C = c \,.\, d \,.\, e \ldots$, so lässt sich jede mit C gleichartige Grösse C_1 in der Form $c_1 \,.\, d \,.\, e \ldots$ darstellen, wie wir schon an mehreren Orten gezeigt haben. Ist also

$$\frac{A_1}{A}\, C = C_1 \quad \text{oder} \quad A_1 \,.\, C = A \,.\, C_1,$$

so hat man nun durch jene Substitution

$$A_1 \,.\, c \,.\, d \,.\, e \ldots = A \,.\, c_1 \,.\, d \,.\, e \ldots,$$

woraus, vermöge der Gleichartigkeit der Faktoren, folgt (§ 63)

$$A_1 \,.\, c = A \,.\, c_1,$$

somit auch nach dem soeben erwiesenen Satze

$$B_1 \,.\, c = B \,.\, c_1,$$

also auch durch Wiederholung derselben Schlussreihe

$$B_1 \,.\, c \,.\, d \,.\, e \ldots = B \,.\, c_1 \,.\, d \,.\, e \ldots,$$

das heisst

$$B_1 \,.\, C = B \,.\, C_1$$

oder

$$\frac{B_1}{B} C = C_1 = \frac{A_1}{A} C.$$

Wir haben somit den allgemeinen Satz bewiesen:

Wenn

$$\frac{A_1}{A} B = B_1$$

ist, so ist auch in Bezug auf jede Grösse C, welche von A und von B unabhängig ist,

$$\frac{A_1}{A} C = \frac{B_1}{B} C.$$

§ 65, 66. **Begriff des Quotienten zweier gleichartiger Grössen.**

§ 65.

Da nun der Begriff der Ausdrücke $\frac{A_1}{A}$ und $\frac{B_1}{B}$ nur bestimmt ist, sofern sie mit Grössen verbunden sind, die von A und B unabhängig sind, und für jede zwei solche Verbindungen, in welche $\frac{A_1}{A}$ und $\frac{B_1}{B}$ mit derselben Grösse eingehen, unter der Voraussetzung, dass

$$\frac{A_1}{A} B = B_1$$

ist, die Gleichheit dargethan ist, so folgt, dass wir berechtigt sind,
99 die Ausdrücke $\frac{A_1}{A}$ und $\frac{B_1}{B}$ unter obiger Voraussetzung selbst | einander gleichzusetzen, und dadurch den Begriff, den diese Ausdrücke an sich haben, zu bestimmen. Also

99 *Wenn*

$$\frac{A_1}{A} B = B_1$$

oder $A_1 \,.\, B = A \,.\, B_1$ ist (A und B von einander unabhängig gedacht), so setzen wir

$$\frac{A_1}{A} \textit{ gleich } \frac{B_1}{B}.$$

Es ist klar, wie hierdurch die Bedeutung von $\frac{A_1}{A}B$ auch dann bestimmt ist, wenn B von A abhängig ist; denn man hat nur eine Hülfsgrösse C anzunehmen, welche von A und B unabhängig ist, und C_1 so zu bestimmen, dass nach der angegebenen Definition $\frac{C_1}{C}$ gleich ist $\frac{A_1}{A}$, so ist durch Substitution des Gleichen

$$\frac{A_1}{A}B = \frac{C_1}{C}B,$$

und dadurch auch der Begriff des ersten Ausdrucks bestimmt. Namentlich ergiebt sich daraus, dass

$$\frac{A_1}{A}A = A_1$$

ist. Denn nimmt man eine Hülfsgrösse B, welche von A unabhängig ist, und setzt

$$\frac{A_1}{A} = \frac{B_1}{B},$$

das heisst

$$\frac{B_1}{B}A = A_1,$$

so muss auch nach dem allgemeinen Begriff des Gleichen

$$\frac{A_1}{A}A = \frac{B_1}{B}A$$

sein; der letztere Ausdruck ist aber, wie wir soeben zeigten, gleich A_1, also auch der erstere, was wir zeigen wollten.

Hieraus nun folgt zugleich, dass der Ausdruck $\frac{A_1}{A}$ als Quotient aufgefasst werden könne, sobald seine Verbindung mit andern Grössen, wie wir sie bisher beschrieben, als Multiplikation dargethan ist, das heisst die Beziehung jener Verbindung zur Addition als eine multiplikative nachgewiesen ist.

§ 66.

Zuerst ist

$$\frac{A_1}{A}(b+c) = \frac{A_1}{A}b + \frac{A_1}{A}c.$$

Nämlich $\frac{A_1}{A}(b+c)$ ist eine mit $b+c$ gleichartige Strecke, welche sich daher auch in | Stücken ausdrücken lassen muss, die mit b und c *100*
gleichartig sind; es seien dies b_1 und c_1, also

(1) $$\frac{A_1}{A}(b+c) = b_1 + c_1$$ 100

oder

$$A_1 \,.\, (b+c) = A \,.\, (b_1 + c_1).$$

Man multiplicire diese Gleichung mit c, so hat man

$$A_1 \,.\, b \,.\, c = A \,.\, b_1 \,.\, c,$$

also auch vermöge der Gleichartigkeit der Faktoren

$$A_1 \,.\, b = A \,.\, b_1 \quad \text{oder} \quad \frac{A_1}{A} b = b_1.$$

Auf dieselbe Weise ergiebt sich durch Multiplikation mit b, dass

$$\frac{A_1}{A} c = c_1$$

ist; substituirt man diese Ausdrücke für b_1 und c_1 in die obige Gleichung (1), so hat man in der That

$$\frac{A_1}{A}(b + c) = \frac{A_1}{A} b + \frac{A_1}{A} c.$$

Es ist dies nun auszudehnen auf den Fall, dass statt b und c Ausdehnungen höherer Stufen B und C eintreten. Die Summe derselben giebt nach § 47 nur dann eine Ausdehnung, wenn beide Ausdehnungen n-ter Stufe sich auf einen gemeinschaftlichen Faktor $(n-1)$-ter Stufe bringen lassen. Es sei daher

$$B = b \,.\, E, \quad C = c \,.\, E.$$

Dann sei

$$\frac{A_1}{A} b = b_1; \quad \frac{A_1}{A} c = c_1,$$

also

$$A_1 \,.\, (b + c) = A \,.\, (b_1 + c_1),$$

so ist auch noch, wenn man diese Gleichung mit E multiplicirt,

$$A_1 \,.\, (b + c) \,.\, E = A \,.\, (b_1 + c_1) \,.\, E$$

oder

$$A_1 \,.\, (b \,.\, E + c \,.\, E) = A \,.\, (b_1 \,.\, E + c_1 \,.\, E)$$

oder

(2) $$\frac{A_1}{A}(B + C) = b_1 \,.\, E + c_1 \,.\, E.$$

Es ist aber, wenn man die Gleichungen, durch welche b_1 und c_1 bestimmt wurden, in Produktform darstellt und mit E multiplicirt,

$$A_1 \,.\, b \,.\, E = A \,.\, b_1 \,.\, E; \quad A_1 \,.\, c \,.\, E = A \,.\, c_1 \,.\, E,$$

also

101 $$\frac{A_1}{A} B = b_1 \,.\, E$$

101 und auf dieselbe Weise

$$\frac{A_1}{A} C = c_1 \,.\, E.$$

Diese Ausdrücke für $b_1 \,.\, E$ und $c_1 \,.\, E$ in die obige Gleichung (2) substituirt, hat man

$$\frac{A_1}{A}(B + C) = \frac{A_1}{A} B + \frac{A_1}{A} C.$$

Gilt nun die multiplikative Beziehung für reale Summen, so gilt sie auch für formale, weil diese ihrem Begriffe nach nur durch jene bestimmt sind; da nämlich dann $B + C$ keine Ausdehnung darstellt, so hat auch

$$\frac{A_1}{A}(B + C)$$

nur die formelle Bedeutung, dass es

$$= \frac{A_1}{A} B + \frac{A_1}{A} C$$

gesetzt werde. Es gilt also die multiplikative Beziehung für diese Ausdrücke $\left(\frac{A_1}{A}, \ldots\right)$ allgemein, und ihre Verknüpfung, wie wir sie aufgefasst haben, ist als wahre Multiplikation zu fassen. Also ist auch $\frac{A_1}{A}$ selbst ein wahrer Quotient*).

§ 67. Proportion.

Um eine anschaulichere Idee des Quotienten zu gewinnen, gehen wir zunächst von Strecken aus; es seien a und b von einander unabhängig, und

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} \quad \text{oder} \quad a_1 . b = a . b_1 ,$$

so hat man aus der letzten Gleichung

$$a_1 . b + b_1 . a = 0,$$

oder da man dem zweiten Faktor Stücke hinzufügen darf, die dem *102*
ersten gleichartig sind,

$$a_1 . (a + b) + b_1 . (a + b) = 0,$$ 102

$$(a_1 + b_1) . (a + b) = 0,$$

das heisst $(a + b)$ und $(a_1 + b_1)$ sind gleichartig oder können als Theile desselben Systems erster Stufe aufgefasst werden. Nach der Erzeugungsweise des Systems erster Stufe mussten dann a_1 und b_1 entsprechende Theile von a und b sein. Schreibt man nun die ursprüngliche Gleichung als Proportion

$$a_1 : a = b_1 : b ,$$

so gelangt man zu dem Satze: Vier Strecken stehen in Proportion,

*) Da die Stufenzahl des Quotienten die Differenz ist zwischen den Stufenzahlen des Dividend und Divisor, so ist $\frac{A_1}{A}$ als Ausdehnungs-Grösse nullter Stufe zu fassen, was auch damit übereinstimmt, dass, wenn eine Ausdehnung mit ihr multiplicirt wird, sich deren Stufenzahl nicht ändert.

wenn die erste von der zweiten der entsprechende Theil ist, wie die dritte von der vierten. Nach dem Begriff des Quotienten zweier gleichartiger Grössen bleibt der Werth desselben ungeändert, wenn man Dividend und Divisor mit derselben unabhängigen Ausdehnung multiplicirt, den Quotienten erweitert; nämlich wenn

$$a_1 \,.\, b = a \,.\, b_1, \text{ also } \frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b}$$

ist, so ist auch

$$a_1 \,.\, E \,.\, b = a \,.\, E \,.\, b_1,$$

also

$$\frac{a_1 \,.\, E}{a \,.\, E} = \frac{b_1}{b}, \text{ also } = \frac{a_1}{a}.$$

Somit kann man auch jedes Verhältniss durch eine beliebige Ausdehnung erweitern. Nun können wir sagen, dass $a_1 \,.\, E$ von $a \,.\, E$ der entsprechende Theil ist, wie a_1 von a, und somit haben wir den allgemeinen Satz:

Vier Grössen stehen in Proportion, wenn die erste von der zweiten der entsprechende Theil ist, wie die dritte von der vierten.

§ 68. Zahlengrösse, Produkt derselben mit einer Ausdehnungsgrösse.

Wir haben nun die Verknüpfungen dieser neu gewonnenen Grössen, die wir *Zahlengrössen* nennen, sowohl unter sich, als mit den Ausdehnungsgrössen darzustellen.

Die multiplikative Verknüpfung derselben mit den Ausdehnungsgrössen haben wir dargestellt, und ihre Beziehung zur Addition gesichert. Wir haben nun die rein multiplikativen Gesetze dieser Verknüpfung, das heisst die Vereinbarkeit und Vertauschbarkeit der Faktoren zu untersuchen. Es ergiebt sich, dass man in einem äusseren Produkt, worin Zahlengrössen vorkommen, diese jedem beliebigen Faktor
103 zuordnen | kann, ohne den Werth des Resultates zu ändern.

In der That ist, $\frac{a_1}{a}$ mit α bezeichnet,

103 $$\alpha\,(B \,.\, C) = (\alpha B) \,.\, C.$$

Denn es sei αB oder $\frac{a_1}{a}\, B = B_1$, oder

$$a_1 \,.\, B = a \,.\, B_1,$$

so hat man durch Multiplikation mit C

$$a_1 \,.\, B \,.\, C = a \,.\, B_1 \,.\, C;$$

also auch nach der Definition

$$\frac{a_1}{a}(B\,.\,C) = B_1\,.\,C,$$

oder

$$\alpha\,(B\,.\,C) = (\alpha B)\,.\,C.$$

Was die Vertauschbarkeit anbetrifft, so ist die Bedeutung des Ausdrucks $A\alpha$, wo A eine beliebige Ausdehnung, α aber eine Zahlengrösse ist, noch nicht festgesetzt; und wir können diese Bedeutung nach der Analogie bestimmen. Nämlich, da die Ausdehnungsgrösse nullter Stufe als Ausdehnungsgrösse von gerader Stufe erscheint, eine solche aber in einem äusseren Produkt beliebig geordnet werden darf, so können wir feststellen, dass unter $A\alpha$ dasselbe verstanden sein solle, wie unter αA, woraus dann folgt,

dass die Stellung einer Zahlengrösse innerhalb eines äusseren Produktes ganz gleichgültig ist.

Was endlich den Quotienten einer Ausdehnung durch eine Zahlengrösse betrifft, so ist dessen Bedeutung aus dem allgemeinen Begriff der Division sogleich klar, und die Eindeutigkeit dieses Quotienten, so lange der Divisor nicht null wird, ergiebt sich leicht. In der That, es sei

$$\frac{B}{\alpha} = X, \quad \alpha = \frac{a}{a_1},$$

wo a von B unabhängig sei, so hat man

$$\alpha X = B, \quad \frac{a}{a_1} X = B, \quad a\,.\,X = a_1\,.\,B,$$

und wir haben oben gezeigt, dass es nur Einen mit B gleichartigen Werth X giebt, welcher dieser letzten Gleichung genügt, während jene Gleichartigkeit in den vorhergehenden Gleichungen ausgesagt ist.

§ 69, 70. **Produkt mehrerer Zahlengrössen.**

§ 69.

Zu dem Begriffe des Produktes mehrerer Zahlengrössen gelangen *104*
wir vom fortschreitenden Produkte aus.

Setzen wir das Produkt

(1) $$P\,.\,\alpha\beta\gamma\ldots = P_1,$$

wo die Ausdehnung P mit den Zahlengrössen α, β, γ, ... fortschrei- 104
tend, das heisst so multiplicirt werden soll, dass das Resultat jeder früheren Multiplikation mit der nächstfolgenden Zahlengrösse multiplicirt wird: so entsteht die Aufgabe, eine Zahlengrösse zu finden, mit welcher P multiplicirt sogleich dasselbe Resultat P_1 gebe. Zu dem

Ende seien α, β, γ, ... dargestellt in den Formen

$$\frac{A_1}{A}, \ \frac{B_1}{B}, \ \frac{C_1}{C}, \ldots,$$

so dass P, A, B, C, ... alle von einander unabhängig seien. Multiplicirt man dann beide Seiten der obigen Gleichung (1) mit $A . B . C \ldots$, so kann man nach dem vorigen Paragraphen die Zahlengrössen α, β, γ, ... oder

$$\frac{A_1}{A}, \ \frac{B_1}{B}, \ \frac{C_1}{C}, \ldots$$

jedem beliebigen dieser Faktoren zuordnen, also auch $\frac{A_1}{A}$ dem A, und so weiter, und erhält dadurch

$$P . A_1 . B_1 . C_1 \ldots = P_1 . A . B . C \ldots.$$

Also ist, da P_1 dem P gleichartig ist, nach der Definition des Quotienten

$$P_1 = P \frac{A_1 . B_1 . C_1 \ldots}{A . B . C \ldots}.$$

Somit haben wir das Gesetz, dass

$$P \frac{A_1}{A} \frac{B_1}{B} \frac{C_1}{C} \cdots = P \frac{A_1 . B_1 . C_1 \ldots}{A . B . C \ldots}$$

ist, zunächst zwar nur, wenn P von $A . B . C \ldots$ unabhängig ist, aber demnächst auch, wenn P hiervon abhängig ist. Um dies zu zeigen, stellen wir zuerst die Zahlengrössen α, β, γ, ... oder die Quotienten $\frac{A_1}{A}, \cdots$ in neuen Formen $\left(\frac{\mathsf{A}_1}{\mathsf{A}}, \ldots\right)$ dar, so dass P von $\mathsf{A} . \mathsf{B} . \Gamma \ldots$ unabhängig ist, so werden wir nun das obige Gesetz anwenden können, und eine Zahlengrösse ϱ erhalten, welche statt der fortschreitenden Faktoren $\frac{A_1}{A}, \ldots$ $\left(\text{oder } \frac{\mathsf{A}_1}{\mathsf{A}}, \cdots\right)$ gesetzt werden kann und welche gleich

$$\frac{\mathsf{A}_1 . \mathsf{B}_1 . \Gamma_1 \ldots}{\mathsf{A} . \mathsf{B} . \Gamma \ldots}$$

105 ist. Nimmt man nun eine Ausdehnung Q zu | Hülfe, welche sowohl von $A . B . C \ldots$ als auch von dieser neuen Grösse $\mathsf{A} . \mathsf{B} . \Gamma \ldots$ unabhängig ist, so ergiebt sich $Q \alpha \beta \gamma \ldots$ vermöge der ersten Grössen gleich

105 $$Q \frac{A_1 . B_1 . C_1 \ldots}{A . B . C \ldots},$$

vermöge der zweiten aber gleich

$$Q \varrho.$$

Also ist

$$\varrho = \frac{A_1 . B_1 . C_1 \ldots}{A . B . C \ldots}.$$

Nun war aber

$$P \,.\, \alpha\beta\gamma \ldots = P\varrho$$

vermöge der zweiten Reihe von Formen, also ist auch vermöge des gefundenen Werthes für ϱ

$$P \frac{A_1}{A} \frac{B_1}{B} \frac{C_1}{C} \cdots = P \frac{A_1 \,.\, B_1 \,.\, C_1 \ldots}{A \,.\, B \,.\, C \ldots}.$$

Es ist also das obige Gesetz in seiner ganzen Allgemeinheit bewiesen.

§ 70.

Hieraus gehen sogleich zwei für die Verknüpfung der Zahlengrössen höchst wichtige Folgerungen hervor, nämlich erstens, dass, wenn für irgend eine Grösse P die fortschreitende Multiplikation mit mehreren Zahlengrössen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ durch die Multiplikation mit einer bestimmten Zahlengrösse ϱ ersetzt wird, dies auch für jede andere Grösse gilt, die statt P gesetzt wird, indem nämlich der für ϱ im vorigen Paragraphen gewonnene Ausdruck gänzlich unabhängig ist von P, und nur von den Zahlengrössen $\alpha, \beta, \ldots$ abhängt; zweitens dass die Zahlengrössen auch beliebig unter sich vertauscht werden können, weil man in dem Produkt

$$\frac{A_1 \,.\, B_1 \ldots}{A \,.\, B \ldots}$$

im Zähler und Nenner gleiche Vertauschungen vornehmen kann, indem dadurch in beiden gleiche Zeichenänderungen, also für den Werth des Quotienten gar keine hervorgeht. Die erste dieser Folgerungen berechtigt uns, das Produkt $\alpha\beta\gamma \ldots$ selbst gleich ϱ zu setzen. Also:

Unter dem Produkte mehrerer Zahlengrössen ist diejenige Zahlengrösse zu verstehen, welche in ihrer Multiplikation mit irgend einer Ausdehnung dasselbe Resultat liefert, als wenn | diese Ausdehnung fortschrei- *106*
tend mit den Faktoren jenes Produktes multiplicirt wird.

Hiernach ist also, wenn $A, B, C, \ldots$ von einander unabhängig sind,

$$\frac{A_1}{A} \frac{B_1}{B} \frac{C_1}{C} \cdots = \frac{A_1 \,.\, B_1 \,.\, C_1 \ldots}{A \,.\, B \,.\, C \ldots}. \qquad 106$$

Die zweite Folgerung, die wir vorher ableiteten, sagt nun aus, dass man Zahlengrössen als Faktoren unmittelbar vertauschen könne.

§ 71. **Geltung aller Gesetze arithmetischer Multiplikation und Division für die Zahlengrössen.**

Um nun die Geltung aller Gesetze arithmetischer Multiplikation und Division (s. § 6) für die Zahlengrössen nachzuweisen, haben wir noch die Eindeutigkeit des Quotienten $\frac{\beta}{\alpha}$, so lange α nicht null ist, darzuthun.

Es bedeutet nach der allgemeinen Definition analytischer Verknüpfungen $\frac{\beta}{\alpha}$ diejenige Grösse, welche mit α multiplicirt β giebt; es sei nun $\alpha\gamma$ gleich β, so haben wir zu zeigen, dass, wenn zugleich $\alpha\gamma'$ gleich β sei, γ nothwendig gleich γ' sein müsse, vorausgesetzt noch immer, dass α nicht null sei. Es soll also, wenn A irgend eine Ausdehnung vorstellt, vorausgesetzt werden, dass

$$A\beta = A(\alpha\gamma) = A(\alpha\gamma')$$

sei; da man aber nach dem vorigen Paragraphen statt mit dem Produkte, mit den einzelnen Faktoren multipliciren kann, so hat man auch

$$(A\alpha)\gamma = (A\alpha)\gamma'.$$

Nun haben wir aber bei der Definition der Zahlengrösse festgesetzt, dass zwei Zahlengrössen, welche mit derselben Ausdehnung multiplicirt gleiches Resultat geben, auch als gleich betrachtet werden müssen. Ist nun α nicht null, so ist $A\alpha$ eine wirkliche Ausdehnung, also nach der angeführten Bestimmung $\gamma = \gamma'$, das heisst der Quotient zweier Zahlengrössen eindeutig, so lange der Divisor nicht null ist.

Da nun auf der Vertauschbarkeit und Vereinbarkeit der Faktoren, wie auch auf der Eindeutigkeit des Quotienten in dem angegebenen Umfange, alle Gesetze arithmetischer Multiplikation und Division beruhen (§ 6), und dieselben Gesetze auch für die Verknüpfung der Zahlengrössen mit den Ausdehnungen gelten (§ 68), so ergiebt sich, dass

107 *alle Gesetze arithmetischer Multiplikation und Division für die | Verknüpfung der Zahlengrössen unter sich und mit den Ausdehnungsgrössen gelten* *).

107 Hierdurch ist nun zugleich der wesentliche Zusammenhang zwischen der arithmetischen und der äusseren Multiplikation dargethan, indem jene als specielle Gattung von dieser erscheint, für den Fall nämlich, dass die Faktoren Ausdehnungsgrössen nullter Stufe sind. Wir bedienen uns daher für die Multiplikation der Zahlengrössen beliebig bald des Punktes bald des unmittelbaren Aneinanderschreibens, indem das letztere uns oft bequem ist, um die Klammern zu ersparen und dadurch die Uebersicht zu erleichtern.

---

*) Wir entlehnen dabei nichts aus der Arithmetik, als nur den Namen, indem wir die Gesetze dieser Verknüpfungen in der allgemeinen Formenlehre § 6 unabhängig dargethan haben.

§ 72. Addition der Zahlengrössen.

Um zur Addition zweier Zahlengrössen (α und β) zu gelangen, haben wir zunächst den Ausdruck

$$\alpha C + \beta C = C_1$$

zu betrachten, und die Zahlengrösse zu suchen, mit welcher C multiplicirt werden muss, damit derselbe Werth C_1 hervorgehe.

Zu dem Ende seien α, β dargestellt in den Formen $\frac{a_1}{a}$ und $\frac{a_2}{a}$, wo a von C unabhängig sei. Die obige Gleichung verwandelt sich dann in

$$\frac{a_1}{a} C + \frac{a_2}{a} C = C_1$$

und durch die Multiplikation mit a in

$$a_1 . C + a_2 . C = a . C_1 ,$$

oder

$$(a_1 + a_2) . C = a . C_1 ,$$

also

$$C_1 = \frac{a_1 + a_2}{a} C.$$

Wir haben somit den Satz gewonnen, dass

$$\frac{a_1}{a} C + \frac{a_2}{a} C = \frac{a_1 + a_2}{a} C$$

sei, und zwar zunächst nur, wenn a von C unabhängig ist; aber auf dieselbe Weise wie in § 69 lässt sich dies auf den Fall der Abhängigkeit ausdehnen.

Aus diesem Satze nun geht hervor, dass, wenn

$$\alpha C + \beta C = \gamma C$$

ist, dann auch, weil der Ausdruck für γ nur von α und β und nicht von C abhängig ist, dieselbe Gleichung für jeden Werth von C fort- 108
besteht, und darin liegt die Berechtigung, in diesem Falle $\alpha + \beta$ gleich γ zu setzen. Also wir setzen

$$\alpha + \beta = \gamma ,$$

wenn

$$\alpha C + \beta C = \gamma C$$

ist, wo C irgend eine Ausdehnung bezeichnet; das heisst, nach der De- 108
finition ist

$$\alpha C + \beta C = (\alpha + \beta) C.$$

Um nun diese Verknüpfung als wahre Addition nachzuweisen, haben wir die Geltung der additiven Grundgesetze und der additiven Beziehung zur Multiplikation darzuthun.

Zuerst liegt die Vertauschbarkeit der Stücke direkt in der Definition, da auch die Stücke αC und βC vertauschbar sind. Um die Vereinbarkeit der Stücke nachzuweisen, gehen wir darauf zurück, dass

$$(\alpha C + \beta C) + \gamma C = \alpha C + (\beta C + \gamma C)$$

ist; diese Gleichung verwandelt sich, wenn man das in der Definition dargelegte Gesetz auf jeder Seite zweimal anwendet, in

$$[(\alpha + \beta) + \gamma]\, C = [\alpha + (\beta + \gamma)]\, C,$$

woraus folgt

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma).$$

Endlich ist auch das Resultat der Subtraktion eindeutig. Denn wird der Werth von β in der Gleichung

$$\alpha + \beta = \gamma$$

gesucht, so erhalten wir, wenn

$$\alpha = \frac{a_1}{a}, \quad \beta = \frac{a_2}{a}, \quad \gamma = \frac{a_3}{a}$$

gesetzt wird, nach dem obigen die Gleichung

$$a_1 + a_2 = a_3,$$

oder

$$a_2 = a_3 - a_1.$$

Also hat a_2 einen bestimmten Werth, also auch $\frac{a_2}{a}$ oder β, das heisst $\gamma - \alpha$ hat nur Einen Werth, das Resultat der Subtraktion ist eindeutig.

Da somit die Grundgesetze der Addition und Subtraktion gelten, so gelten auch alle Gesetze derselben.

§ 73. Beziehung dieser Addition zur Multiplikation. Allgemeines Gesetz.

Es bleibt uns nur noch übrig, die Beziehung dieser Addition zur Multiplikation darzustellen, und zu zeigen, dass

109 $$\alpha\,(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

ist.

Es ist nach der Definition des Produktes (§ 70)

$$P\,.\,\alpha\,(\beta + \gamma) = P\alpha\,.\,(\beta + \gamma),$$

wo der Punkt zugleich die Stelle der Klammern vertreten soll, der Ausdruck der rechten Seite ist aber nach dem vorigen Paragraphen

$$= P\alpha\,.\,\beta + P\alpha\,.\,\gamma$$
$$= P\,.\,\alpha\beta + P\,.\,\alpha\gamma.$$

109 Also ist wiederum nach dem vorigen Paragraphen, da

$$P\,.\,\alpha\,(\beta + \gamma) = P\,.\,\alpha\beta + P\,.\,\alpha\gamma$$

ist, auch $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$. Durch Verknüpfung dieses Resultates mit den früher gewonnenen gelangen wir nun zu dem allgemeinen Lehrsatze:

Alle Gesetze der arithmetischen Verknüpfungen gelten auch für die Verknüpfungen der Zahlengrössen unter sich und mit den Ausdehnungen; und alle Gesetze der äusseren Multiplikation und ihrer Beziehung zur Addition und Subtraktion bleiben bestehen, auch wenn man die Zahlengrösse als Ausdehnungsgrösse nullter Stufe nimmt, nur dass das Resultat der Division mit ihr ein bestimmtes wird.

Wenden wir den Begriff der Abhängigkeit, wie wir ihn in § 55 für Ausdehnungen aufstellten, auch auf die Zahlengrössen an, als Ausdehnungsgrössen nullter Stufe, so zeigt sich, dass diese immer unter sich und von allen Ausdehnungsgrössen unabhängig gedacht werden müssen, wenn nicht etwa eine dieser Grössen null wird. Die Null hingegen erscheint nach § 32 immer als abhängig. Auf der andern Seite erscheinen die Zahlengrössen stets als einander gleichartig.

B. Anwendungen.

§ 74. **Die Zahlengrösse in der Geometrie.**

Da wir schon in den Anwendungen zu den vorigen Kapiteln der leichteren Uebersicht wegen die Zahlengrösse mit aufgenommen hatten: so bleibt uns hier nur noch übrig, die hier gewählte Methode auf die *Geometrie* anzuwenden.

Es ist als ein wesentlicher Uebelstand bei den bisherigen Darstellungen der Geometrie zu betrachten, dass man bei der Behandlung der Aehnlichkeitslehre auf diskrete Zahlenverhältnisse zurückzugehen pflegt. Dies Verfahren, was sich zuerst leicht darbietet, verwickelt, wie wir schon oben andeuteten, bald genug in die schwierigen Untersuchungen über inkommensurable Grössen; und es rächt sich das Aufgeben | des rein geometrischen Verfahrens gegen ein dem ersten An- *110*
scheine nach leichteres durch das Auftreten einer Menge schwieriger Untersuchungen von ganz heterogener Art, welche über das Wesen der räumlichen Grössen nichts zur Anschauung bringen. Allerdings kann man sich nicht der Aufgabe entziehen, die räumlichen Grössen zu messen und das Resultat dieses Messens in einem Zahlenbegriff auszudrücken. Allein diese Aufgabe kann nicht in der Geometrie | selbst 110
hervortreten, sondern nur dann, wenn man ausgerüstet einerseits mit dem Zahlenbegriff, andrerseits mit den räumlichen Anschauungen, jenen auf diese anwendet, also in einem gemischten Zweige, welchen wir im

allgemeinen Sinne mit dem Namen der Messkunde belegen können, und von welchem die Trigonometrie ein besonderer Zweig ist*). Bis auf diesen Zweig nun die Aehnlichkeitslehre oder auch noch gar die Flächeninhaltslehre hinausschieben zu wollen, wie es zwar nicht der Form nach, aber dem Gehalte nach in der That bisher geschehen ist, hiesse die (reine) Geometrie ihres wesentlichen Inhaltes berauben. Nun finden wir zu dem Wege, den wir hier verlangen, in der neueren Geometrie mannigfache Vorarbeiten, in unserer Wissenschaft aber ist uns der Weg selbst aufs vollkommenste vorgezeichnet.

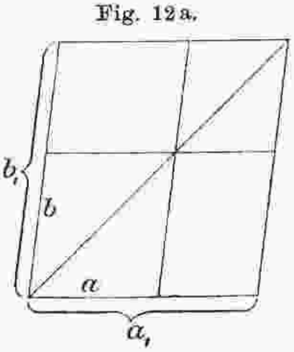
§ 75—79. Rein geometrische Darstellung der Proportionen in der Geometrie.

§ 75.

Es bieten sich hier zwei Ausgangspunkte dar, welche jedoch ihrem Wesen nach zusammenfallen, wie verschieden auch ihr Ausdruck klingen mag. Nämlich vier Strecken, von denen die beiden ersten und die beiden letzten unter sich parallel sind, aber nicht diese mit jenen, stehen in Proportion, nach der ersten Betrachtungsweise, wenn das Spatheck aus der ersten und vierten gleich ist dem aus der zweiten und dritten; nach der zweiten Betrachtungsweise, wenn die Summe aus der ersten und dritten (im Sinne unserer Wissenschaft) parallel ist mit der Summe aus der zweiten und vierten. Schon aus der in § 67 geführten Entwickelung geht die wesentliche Uebereinstimmung beider Betrachtungsweisen hervor, indem wenn

Fig. 12a.

111



$$a_1 \,.\, b = a \,.\, b_1$$

war, daraus hervorging, dass

$$(a_1 + b_1) \,.\, (a + b) = 0\text{**)},$$

das heisst beide Summen $(a + b)$ und $(a_1 + b_1)$ parallel waren, und ebenso würde aus der letzten
111 Gleichung die erste folgen; und es | ist also gleichgültig, von welcher der beiden Gleichungen wir die Gültigkeit der Proportion

$$a_1 : a = b_1 : b$$

abhängig machen.

---

*) Die Zahlengrösse, wie wir sie in unserer Wissenschaft entwickelt haben, erscheint nicht als diskrete Zahl, das heisst nicht als eine Menge von Einheiten, sondern in stetiger Form, als Quotient stetiger Grössen, und setzt daher den diskreten Zahlenbegriff keineswegs voraus.

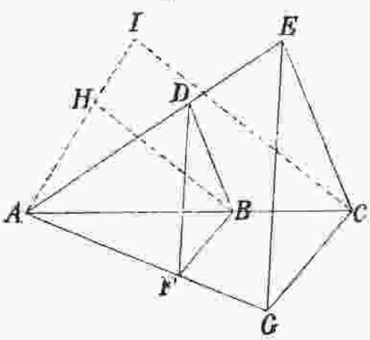
**) Die Formeln sind hier nur Repräsentanten geometrischer Sätze, die ein jeder leicht aus denselben herauslesen kann, s. Fig. 12a.

Wir wollen die zweite Betrachtungsweise als die geometrisch einfachere wählen und können dieselbe so ausdrücken: Wenn zwei Dreiecke parallele Seiten haben, so sagen wir, dass zwei beliebige parallele Seiten beider sich verhalten, wie zwei andere in entsprechender Folge genommen; denn wenn a und b zwei Seiten des einen, und a_1 und b_1 die damit parallelen Seiten des andern sind, so sind eben dann und nur dann $a+b$ und a_1+b_1 einander parallel. Hierbei ist wohl zu beachten, dass auf dieser Stufe vier Strecken, als Strecken, das heisst, mit festgehaltener Länge und Richtung aufgefasst, nur dann als proportionirt erscheinen, wenn sie paarweise parallel sind, und diese parallelen Strecken stellen wir dann in der Proportion auf die beiden ersten und auf die beiden letzten Stellen.

§ 76.

Der eigentliche Nerv der Entwickelung beruht nun darin, die Proportion als Gleichheit zweier Verhältnisse nachzuweisen, so dass, wenn $a:a_1=b:b_1$, und $a:a_1=c:c_1$ ist, auch $b:b_1=c:c_1$ sei.

Fig. 12 b.



Um den geometrischen Ausdruck dieses Satzes zu finden, setzen wir*)

$$a=AB,\quad a_1=AC,$$
$$b=BD,\quad b_1=CE;$$

dann würden, wenn die erste Proportion bestehen soll, die Punkte A, D, E eine gerade Linie bilden müssen, weil $a+b$, das heisst AD parallel sein soll a_1+b_1, das heisst AE. Ebenso sei

$$c=BF,\quad c_1=CG,$$ 112

so werden wieder vermöge der zweiten Proportion die Punkte A, F, G eine gerade Linie bilden. Soll nun auch die dritte Proportion richtig sein, so müsste DF parallel mit EG sein; es ist also zu zeigen, dass, wenn die Ecken eines Dreiecks in geraden Linien fortrücken, die sich
in Einem Punkte schneiden, und zwei von den | Seiten parallel bleiben, 112
auch die dritte parallel bleiben müsse.

Dieser Satz ergiebt sich sogleich, wenn die beiden Dreiecke oder (was auf dasselbe zurückläuft) die drei Linien, in welchen sich die Ecken bewegen, nicht in derselben Ebene liegen. In diesem Falle darf man nur durch je zwei der von A ausgehenden Linien eine Ebene ge-

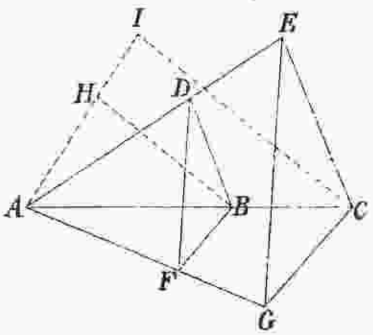
*) S. Fig. 12b.

legt denken, und durch den Punkt C eine mit BDF parallele Ebene legen, so wird diese die drei ersten Ebenen in Kanten schneiden, welche mit den Seiten jenes Dreiecks BDF parallel sind, und wovon zwei mit CE und CG zusammenfallen; somit wird auch die dritte mit EG zusammenfallen, also EG mit DF parallel sein.

§ 77.

Liegen jene Linien in Einer Ebene, so hat man nur von B und C zwei ausserhalb der Ebene liegende einander parallele Linien zu ziehen, welche durch eine von A aus gezogene Linie in den Punkten H und I geschnitten werden. Dann ist nach dem Satze des vorigen Paragraphen erstens HD parallel IE, zweitens HF parallel IG, also vermöge des Parallelismus dieser beiden Linienpaare wieder nach demselben Satze DF parallel mit EG.

Fig 12b.



Somit haben wir allgemein bewiesen, dass, wenn die Ecken eines Dreiecks sich in geraden Linien fortbewegen, die durch einen Punkt gehen, und zwei Seiten parallel bleiben, auch die dritte es bleibt; oder dass, wenn zwei Streckenpaare einem und demselben Streckenpaare proportionirt sind, sie auch unter einander proportionirt sein müssen, sobald die drei Streckenpaare drei verschiedene Richtungen darbieten.

§ 78.

Der Begriff einer Proportion zwischen vier parallelen Strecken hat in dem Vorigen noch keine Bestimmung erfahren. In der That ist dieser Fall, obgleich arithmetisch der einfachste, doch geometrisch der verwickeltste, sofern zu drei parallelen Strecken die vierte Proportionale geometrisch nur durch zu Hülfe nehmen einer neuen Richtung erfolgt.

Nach dem Princip der im vorigen Paragraphen geführten Entwickelung haben wir ein Streckenpaar einem ihm parallelen als pro-
113 portionirt zu setzen, wenn beide einem und | demselben Streckenpaare proportionirt sind; denn sind sie es mit Einem solchen, so sind sie es nach dem vorigen Paragraphen auch mit jedem andern, welches dem vorher angenommenen selbst proportionirt ist. Es gilt somit, wenn wir diese Definition noch zu Hülfe nehmen, allgemein der Satz, dass zwei Streckenpaare, welche einem und demselben Streckenpaare pro-

portionirt sind, es auch unter einander sein müssen. | Somit können 113
wir auch die Proportion, wie wir ihren Begriff geometrisch bestimmten, in der That als Gleichheit zweier Ausdrücke darstellen, deren jeden wir ein Verhältniss nennen.

Geometrisch sagt dies Resultat, indem man die proportionirten Strecken an Einen Punkt anlegt, zunächst nur aus, dass wenn die Ecken eines Dreiecks oder überhaupt eines Vielecks sich in geraden Linien bewegen, die durch Einen Punkt gehen, und die übrigen Seiten dabei sich parallel bleiben, auch die letzte sich parallel bleiben müsse, und ebenso jede Diagonale. Oder betrachtet man dies sich ändernde Vieleck in zweien seiner Zustände, so hat man den Satz: „Wenn die geraden Linien, welche die entsprechenden Ecken zweier Vielecke von gleicher Seitenzahl verbinden, durch Einen Punkt gehen, und alle entsprechenden Seitenpaare bis auf eines parallel sind, so muss auch dies eine Paar parallel sein." Jene Vielecke heissen dann bekanntlich „ähnlich und ähnlich liegend", jener Eine Punkt ihr „Aehnlichkeitspunkt". Umgekehrt ergiebt sich, dass zwei Dreiecke, welche parallele Seiten haben, auch ähnlich und ähnlich liegend sind, oder dass die geraden Linien, welche ihre entsprechenden Ecken verbinden, durch Einen Punkt gehen. Hieraus wieder folgt, dass in ähnlichen und ähnlich liegenden Figuren die Durchschnittspunkte zweier entsprechender Diagonalenpaare mit dem Aehnlichkeitspunkte in einer geraden Linie liegen, und überhaupt, dass, wenn man die Verbindungslinien entsprechender Punktenpaare und ebenso die Durchschnittspunkte entsprechender Linienpaare als entsprechend setzt, dann jedesmal in ähnlichen und ähnlich liegenden Figuren je zwei entsprechende Punkte mit dem Aehnlichkeitspunkte in gerader Linie liegen, je zwei entsprechende Linien aber parallel sind.

Hiermit sind dann die Sätze für die Aehnlichkeit, so weit man sie auf dieser Stufe (ohne den Begriff der Länge aufzunehmen) ableiten kann, entwickelt, und überall auf dem Begriff des Aehnlichkeitspunktes
basirt. Es ist aber auch leicht abzusehen, wie | dem ganz entsprechend, *114*
wenn man noch den Begriff der Länge, wie es in der Geometrie gewöhnlich geschieht, sogleich mit aufnimmt, alle Sätze der Aehnlichkeit selbst genau in der Form, in welcher man sie gewöhnlich aufstellt, dargestellt werden können, ohne dass man irgend den Begriff der Zahl aufzunehmen Ursache hätte. Auf die weitere Darlegung
dieses Gegenstandes kann ich mich um so | weniger einlassen, da 114
die Entwickelung dem zweiten Theile dieses Werkes parallel gehen würde.

§ 79.

Nachdem wir so das Princip der Entwickelung für die Geometrie dargelegt haben, können wir uns wohl der Mühe überheben, die Entwickelung noch auf die Proportionalität der Flächenräume auszudehnen. Auch erscheint es überflüssig, für die Verknüpfungen der Zahlengrössen, wie wir sie in der abstrakten Wissenschaft formell bestimmt haben, noch die entsprechenden Sätze der Geometrie aufzustellen, da dieselben ihres Formalismus wegen nur für die Analyse eine Bedeutung haben, und mehr als blosse analytische Abkürzungen erscheinen, als dass sie eigenthümliche räumliche Verhältnisse darlegten.

Interessant ist es noch zu bemerken, wie bei der rein geometrischen Darstellung wie auch in der abstrakten Wissenschaft die Betrachtung vom Raume aus zur Ebene, und dann erst von dieser zur geraden Linie führt, und dass somit diejenige Betrachtung, in welcher alles räumlich aus einander tritt, sich räumlich entfaltet, auch als die der Raumlehre eigenthümliche und für sie als die einfachste erscheint, während, wenn die Gebilde in einander liegen, dann auch alles noch verhüllt erscheint, wie der Keim in der Knospe, und erst seine räumliche Bedeutung gewinnt, wenn man das Ineinanderliegende in Beziehung setzt zu dem räumlich Entfalteten.

Fünftes Kapitel.

Gleichungen, Projektionen.

A. Theoretische Entwickelung.

§ 80. Ableitung neuer Gleichungen aus einer gegebenen durch Multiplikation.

Nachdem wir in den vorigen Kapiteln die Verknüpfungsgesetze kennen gelernt haben, welchen die Ausdehnungsgrössen unterliegen,
115 so bleibt uns nun übrig, diese Gesetze auf | die Auflösung und Umgestaltung der Gleichungen, welche zwischen solchen Grössen stattfinden können, anzuwenden.

Da die Glieder auf beiden Seiten einer Gleichung als zu addirende oder zu subtrahirende alle von gleicher Stufe sein müssen, so können wir der Gleichung selbst diese Stufenzahl beilegen, und also unter einer Gleichung n-ter Stufe eine solche verstehen, deren Glieder von n-ter Stufe sind. Zunächst haben wir uns nun die Frage zu stellen,

was für Umgestaltungen wir mit solchen Gleichungen vornehmen dürfen, 115
oder wie wir andere Gleichungen daraus ableiten können. Dass man die Glieder derselben mit Aenderung der Vorzeichen von einer Seite auf die andere bringen kann, ist klar, und es fragt sich also nur noch nach den Umgestaltungen, welche eine Gleichung durch Multiplikation und Division erleiden kann. Dabei wollen wir annehmen, dass alle Glieder auf dieselbe (linke) Seite gebracht seien, und also die andere (rechte) Seite gleich Null ist.

Nun ist klar, dass, wenn man beide Seiten der Gleichung mit einer und derselben Ausdehnungsgrösse multiplicirt, dann die rechte Seite null bleibt, auf der linken aber statt der ganzen Summe die einzelnen Glieder multiplicirt werden können. Man kann also, indem man alle Glieder einer Gleichung jedesmal mit derselben Ausdehnungsgrösse multiplicirt, eine Reihe neuer Gleichungen aus derselben ableiten, welche im Allgemeinen (wenn der hinzutretende Faktor nicht etwa von nullter Stufe ist) von höherer Stufe sind als die gegebene.

Ist die gegebene Gleichung von m-ter Stufe, und ist das System, welchem alle Glieder angehören, und welches wir das **Hauptsystem** der Gleichung nennen, von n-ter Stufe, so kann man insbesondere jene Gleichung mit einer Ausdehnung von **ergänzender**, das heisst von $(n-m)$-ter Stufe, welche gleichfalls dem Hauptsysteme angehört, multipliciren, und erhält dadurch eine Gleichung von n-ter Stufe, deren Glieder alle einander gleichartig sind. Hiernach kann man also aus jeder Gleichung, deren Glieder ungleichartig sind, insbesondere eine Reihe von Gleichungen ableiten, deren jede lauter gleichartige Glieder enthält.

§ 81. Wiederherstellung der ursprünglichen Gleichung.

Obgleich man nun aus einer Gleichung beliebig viele Gleichungen höherer Stufen ableiten kann, so kann man doch nicht umgekehrt aus einer der letzteren die ursprüngliche Gleichung herstellen. In der That, wenn man aus der ursprünglichen Gleichung

$$A = 0,$$ *116*

in welcher A ein Aggregat von beliebig vielen Gliedern bedeutet, durch Multiplikation mit einer beliebigen Ausdehnung L eine neue Gleichung

$$A \,.\, L = 0$$

abgeleitet hat, so folgt nun, wenn nur die Richtigkeit der letzten Gleichung gegeben ist, keinesweges daraus die Richtigkeit der ersteren; 116
vielmehr folgt aus jener letzten nur

$$A = \frac{0}{L},$$

in welcher nach dem vorigen Kapitel $\frac{0}{L}$ jede von L abhängige Grösse, die Null mit eingeschlossen, darstellt. Die Gleichung $A = 0$ wird sich daher nur dann ergeben, wenn vorausgesetzt ist, dass A keinen von L abhängigen geltenden Werth habe, oder mit andern Worten, wenn die Glieder, als deren Summe A gedacht ist, einem von L unabhängigen Systeme angehören; das heisst:

wenn die Glieder einer Gleichung alle einen gemeinschaftlichen Faktor L auf derselben Stelle haben, und die sämmtlichen übrigen Faktoren aller Glieder einem von diesem gemeinschaftlichen Faktor unabhängigen Systeme angehören, so kann man den Faktor L in allen Gliedern weglassen.

§ 82. **Projektion oder Abschattung. Abschattung einer Summe.**

Durch Verknüpfung der Verfahrungsarten der beiden vorigen Paragraphen gelangen wir nun zu einem Verfahren, um aus einer Gleichung andere Gleichungen derselben Stufe abzuleiten.

In der That, ist

$$A + B + \cdots = 0$$

die ursprüngliche Gleichung, so erhalten wir durch Multiplikation mit L (nach § 80) die Gleichung

$$A \,.\, L + B \,.\, L + \cdots = 0.$$

Wollen wir nun hierauf das Verfahren von § 81 anwenden, um den Faktor L wegzuschaffen, so müssen wir die Glieder dieser Gleichung in solcher Form darstellen, dass die Faktoren, mit welchen L multiplicirt ist, ins Gesammt einem von L unabhängigen Systeme angehören.

Es sei G ein solches System und A', B', ... seien Ausdehnungen, welche diesem System angehören, und die Beschaffenheit haben, dass

117 $$A' \,.\, L = A \,.\, L, \quad B' \,.\, L = B \,.\, L, \ldots$$

sei, so hat man die Gleichung

$$A' \,.\, L + B' \,.\, L + \cdots = 0,$$

und daraus nach dem vorigen Paragraphen

$$A' + B' + \cdots = 0,$$

eine Gleichung, welche von derselben Stufe ist, wie die ursprüngliche.
117 Ein jedes Glied der letzten Gleichung ist aus dem entsprechenden der ersten dadurch hervorgegangen, dass man in dem Systeme G eine Grösse gesucht hat, welche mit einer von G unabhängigen Grösse L multiplicirt dasselbe giebt, wie das entsprechende Glied der ursprüng-

lichen Gleichung, und es zeigt sich sogleich, dass, wenn eine solche Grösse möglich ist, auch immer nur Eine möglich sei. Nimmt man nämlich zwei solche an, etwa A' und A'', welche aus A auf die angegebene Weise entstanden sein sollen, so müssen sie nach der Voraussetzung mit L multiplicirt gleiches Resultat geben (nämlich $A . L$); wir erhalten also die Gleichung

$$A' . L = A'' . L,$$

und da das System G, welchem A' und A'' angehören, von L unabhängig sein soll, so kann man nach § 81 hier L weglassen und hat

$$A' = A'',$$

das heisst, beide Werthe fallen in Einen zusammen; es ist also in der That nur Eine solche Grösse möglich. Wir nennen hier A' die Projektion oder Abschattung*), A die projicirte oder abgeschattete Grösse, G das Grundsystem, das System L das Leitsystem, und sagen, dass A' die Projektion oder Abschattung von A auf G nach (gemäss) dem Leitsystem L sei. Also *unter der Projektion oder Abschattung einer Grösse (A) auf ein Grundsystem (G) nach einem Leitsysteme (L) verstehen wir diejenige Grösse, welche, dem Grundsysteme angehörend, mit einem Theil des Leitsystems gleiches Produkt liefert, wie die projicirte oder abgeschattete Grösse (A).*

Wir können somit den im Anfange dieses Paragraphen entwickelten Satz in der Form aussprechen:

Eine Gleichung bleibt als solche bestehen, wenn man alle ihre Glieder 118
in demselben Sinne abschattet (projicirt);

oder auch, wenn man Ein Glied auf die eine Seite allein geschafft denkt,

die Abschattung (Projektion) einer Summe ist gleich der Summe aus 118
*den Abschattungen der Stücke.***)

§ 83. **Wann die Abschattung null und wann sie unmöglich wird.**

Um der Betrachtungsweise eine grössere Anschaulichkeit zu geben, haben wir zu untersuchen, wann die Abschattung null, und wann sie unmöglich wird.

---

*) Die Namen Projektion und Abschattung sollen nicht überall dasselbe bedeuten, ihr Unterschied wird aber erst im zweiten Abschnitte dieses Theiles heraustreten; auf die hier betrachteten Grössen angewandt, fallen beide Begriffe zusammen.

**) Ich ziehe in dem Ausdruck der Sätze den Namen Abschattung vor, weil in dieser Form die Sätze allgemein sind, und auch für die später zu entwickelnden Grössen bestehen bleiben.

Soll die Abschattung A' null werden, so muss auch, da

$$A' . L = A . L$$

ist, das Produkt $A . L$ null, das heisst A von L abhängig sein; aber auch umgekehrt, herrscht diese Abhängigkeit, so muss, weil das System, dem jeder geltende Werth von A' angehören soll, von L unabhängig ist, also das Produkt $A' . L$ nicht gleich Null machen kann, A' selbst null sein. Also ist die Abschattung dann, aber auch nur dann null, wenn die abgeschattete Grösse vom Leitsystem abhängig ist. Da endlich jede dem Systeme G angehörige Grösse, mit L multiplicirt, dem Systeme $G . L$ angehören muss, so wird $A' . L$, also auch das ihm Gleiche $A . L$, nothwendig dem Systeme $G . L$ angehören, wenn die Abschattung möglich sein soll; wobei der Nullwerth, wie immer, als jedem beliebigen Systeme angehörig und von ihm abhängig betrachtet wird. Aber auch umgekehrt, wenn $A . L$ dem Systeme $G . L$ angehört, so ist die Abschattung allemal möglich; denn wenn $A . L$ nicht null ist, und es dem Systeme $G . L$ angehört, so müssen die einfachen Faktoren von $A . L$ sich als Summen von Stücken darstellen lassen, welche denen von $G . L$ gleichartig sind; also muss dann namentlich A sich auf diese Weise darstellen lassen; aber diejenigen Stücke, welche mit den Faktoren von L gleichartig sind, kann man, ohne den Werth des Produktes $A . L$ zu ändern, [aus A] weglassen; thut man dies, und nennt die so gewonnene Grösse, welche nun statt A eintritt, A', so sind die Faktoren von A' nur von G abhängig, A' gehört also zu-
119 gleich dem Systeme G an, ist also die | Abschattung von A. Ist aber $A . L$ gleich Null, so haben wir schon nachgewiesen, dass die Abschattung auch null, also möglich ist.

Somit hat sich ergeben, dass die Abschattung allemal dann, aber auch nur dann, möglich ist, wenn das Produkt der abgeschatteten
119 Grösse in das Leitsystem dem Produkte des Grundsystems in das Leitsystem angehört. Da, wenn $A . L$ nicht null ist, die angeführte Bedingung mit der Bedingung identisch ist, dass A dem Systeme $G . L$ angehöre, so können wir die Resultate dieses Paragraphen auch in folgendem Satze zusammenfassen:

Ist die abzuschattende Grösse von dem Leitsysteme abhängig, so ist die Abschattung null; ist sie davon unabhängig, so hat die Abschattung allemal dann einen geltenden Werth, wenn die abzuschattende Grösse dem aus dem Grund- und Leitsysteme zusammengesetzten Systeme angehört; in jedem andern Falle ist sie unmöglich.

Wenden wir den Begriff der Abschattung auch auf die Grössen nullter Stufe, das heisst auf die Zahlengrössen an, so haben wir nur zu beachten, dass die Allgemeinheit der Gesetze es erfordert, dieselben als jedem beliebigen Systeme angehörig, aber, wenn sie nicht null sind, als von ihnen unabhängig zu betrachten (s. Kap. 4). Daraus geht dann hervor, dass die Zahlengrössen bei der Abschattung sich nicht ändern.

§ 84. Abschattung eines Produktes und eines Quotienten. Allgemeines Gesetz.

Wir gehen nun zur Abschattung eines Produktes über, um dieselbe mit den Abschattungen seiner Faktoren zu vergleichen.

Es sei $A . B$ das Produkt, A' und B' die Abschattungen von A und B auf das Grundsystem G nach dem Leitsysteme L, so hat man die Gleichungen

$$A' . L = A . L \quad \text{und} \quad B' . L = B . L .$$

Die Abschattung des Produktes $A . B$ wird nun diejenige Grösse sein, welche, dem Systeme G angehörend, mit L multiplicirt ein Produkt giebt, welches gleich $A . B . L$ ist. Da nun $A . L$ gleich ist $A' . L$, so kann ich in dem Produkte $A . B . L$ statt A den Werth A' setzen, wie sich sogleich durch zweimalige Vertauschung und Zusammenfassung ergiebt.*) Somit erhalte ich

$$A . B . L = A' . B . L = A' . B' . L , \tag{120}$$

letzteres, weil $B . L$ gleich ist $B' . L$. Da nun A' und B' beide dem Systeme G angehören, so gehört auch $A' . B'$ ihm an, und da zugleich, wie wir eben zeigten,

$$A . B . L = A' . B' . L$$

ist, so ist in der That $A' . B'$ die Abschattung von $A . B$; also hat man den Satz:

Die Abschattung eines Produktes ist das Produkt aus den Abschattungen seiner Faktoren, wenn alle Abschattungen in demselben Sinne genommen (das heisst Grundsystem und Leitsystem dieselben) sind;

oder mit dem früheren Resultate zusammengefasst:

Eine richtige Gleichung bleibt richtig, wenn man ihre Glieder, oder die Faktoren ihrer Glieder, alle in demselben Sinne abschattet.

---

*) In der That kann ich $A . B . L$ entweder gleich $A . L . B$ oder gleich $- A . L . B$ setzen, dann die Faktoren $A . L$ zu einem Produkt zusammen fassen, statt dieses Produktes das ihm gleiche $A' . L$ setzen, und dann die vorige Ordnung wiederherstellen, wobei, wenn das *minus*-Zeichen eingetreten war, sich nothwendig das ursprüngliche Zeichen wiederherstellt.

Hat man ins Besondere die Gleichung

$$A_1 = \alpha A, \text{ oder } \frac{A_1}{A} = \alpha,$$

wo α eine Zahlengrösse bezeichnen soll, so folgt daraus, wenn A_1' und A' die Abschattungen von A_1 und A sind, die Gleichung

$$A_1' = \alpha A' \text{ oder } \frac{A_1'}{A'} = \alpha,$$

das heisst der Werth eines Quotienten zweier gleichartiger Grössen ändert sich nicht, wenn man statt derselben die in gleichem Sinne genommenen Abschattungen setzt. Oder allgemeiner, sucht man die Abschattung eines Quotienten $\frac{A}{.B}$, so hat man, da dieser Quotient jede Grösse C bezeichnet, welche der Gleichung

$$C.B = A$$

genügt, durch Abschattung der einzelnen Faktoren in gleichem Sinne die neue Gleichung

$$C'.B' = A' \text{ oder } C' = \frac{A'}{.B'},$$

121 das heisst, statt einen Quotienten abzuschatten, kann man Zähler und Nenner in demselben Sinne abschatten. Fassen wir daher Addition,
121 Subtraktion, äussere Multiplikation und Division unter dem | allgemeinen Begriffe der *Grundverknüpfungen* zusammen, so können wir den allgemeinen Satz aufstellen, welcher die früheren in sich schliesst:

Statt das Ergebniss einer Grundverknüpfung abzuschatten, kann man deren Glieder in demselben Sinne abschatten.

§ 85. Analytischer Ausdruck der Abschattung.

Es bietet sich uns hier die Aufgabe dar, die Abschattung analytisch auszudrücken, wenn die Grösse, welche abgeschattet werden soll, und der Sinn der Abschattung, das heisst Grundsystem und Leitsystem gegeben sind. Doch beschränken wir uns hier nur auf den Fall, dass die abzuschattende Grösse mit dem Grundsysteme von gleicher Stufe ist, indem die Lösung im allgemeineren Falle zwar auch schon hier leicht zu bewerkstelligen ist, jedoch zu einem Ausdrucke führen würde, der an Einfachheit dem später zu entwickelnden Ausdrucke (s. Abschn. II, Kap. 4) sehr nachstehen würde.

Es sei A die abzuschattende Grösse, L ein Theil des Leitsystems, G des Grundsystems, und A und G seien von gleicher Stufe, so wird die Abschattung A' mit G gleichartig sein müssen, also

$$A' = xG$$

gesetzt werden können, wo x eine Zahlengrösse ist. Multiplicirt man diese Gleichung mit L, so hat man

$$A' \,.\, L = xG \,.\, L,$$

oder, da $A' \,.\, L$ nach dem Begriff der Abschattung gleich $A \,.\, L$ ist, so hat man

$$A \,.\, L = xG \,.\, L, \quad \text{also} \quad x = \frac{A \,.\, L}{G \,.\, L}$$

und daraus

$$A' = \frac{A \,.\, L}{G \,.\, L}\, G,$$

was der gesuchte analytische Ausdruck ist. Den Wortausdruck dieses Resultats versparen wir uns bis zur Behandlung des allgemeinen Falles.

§ 86. Ableitung eines Vereins von Gleichungen, welcher die ursprüngliche ersetzt.

Dagegen müssen wir den Faden wieder anknüpfen, den wir oben (§ 81) fallen liessen. Wir hatten nämlich dort gezeigt, wie man zwar aus einer Gleichung

$$A + B + \cdots = 0 \qquad \mathit{122}$$

durch Multiplikation mit einer beliebigen Ausdehnung L eine neue 122
Gleichung

$$A \,.\, L + B \,.\, L + \cdots = 0$$

ableiten, aber aus dieser im Allgemeinen nicht wieder die ursprüngliche herleiten könne; es kommt also jetzt darauf an, aus jener Gleichung einen Verein von Gleichungen dieser Art abzuleiten, welcher jene eine ersetze, das heisst, aus welchem sich jene erste wiederum ableiten lässt.

Ins Besondere liess sich der Faktor L so auswählen, dass nach der Multiplikation der einzelnen Glieder mit diesem Faktor eine Gleichung aus lauter gleichartigen Gliedern hervorging, und da solche Gleichungen als die einfachsten erscheinen, so wird es besonders darauf ankommen, jene erste Gleichung durch Gleichungen dieser Art zu ersetzen.*) Die Entwickelung der folgenden Paragraphen zeigte, wie die Gleichung

$$A \,.\, L + B \,.\, L + \cdots = 0$$

ersetzt werden konnte durch eine Gleichung zwischen den Abschattungen auf ein und dasselbe Grundsystem nach dem Leitsystem L,

*) Wir sagen überhaupt, dass sich zwei Vereine von Gleichungen gegenseitig ersetzen, wenn man aus jedem der beiden Vereine den andern ableiten kann.

also, wenn A', B', ... solche Abschattungen von A, B, ... darstellen, durch die Gleichung

$$A' + B' + \cdots = 0;$$

und die Aufgabe, die wir uns stellten, ist also identisch mit der, eine Gleichung zu ersetzen durch einen Verein von Gleichungen, welche durch Abschattungen der ersteren hervorgehen, und namentlich eine Gleichung zwischen ungleichartigen Gliedern durch solche Abschattungsgleichungen, deren Glieder alle gleichartig sind.

Es sei die ursprüngliche Gleichung von m-ter Stufe, und ihr Hauptsystem, das heisst das System, welchem alle ihre Glieder ins Gesammt angehören, von n-ter Stufe, und zwar sei dies letztere dargestellt als Produkt von n unabhängigen einfachen Faktoren $a . b \ldots$. Alsdann wird nach dem Begriffe des Systems n-ter Stufe sich jeder einfache Faktor eines jeden Gliedes der gegebenen Gleichung als Summe darstellen lassen, deren Stücke jenen Faktoren a, b, ... gleichartig sind,
123 also in der Form $a_1 + b_1 + \cdots$. Denkt man sich | jeden einfachen Faktor jedes Gliedes der gegebenen Gleichung auf diese Weise dargestellt, und führt die Multiplikation aus, so dass die Klammern verschwinden, so erhält man eine Summe von Gliedern, deren jedes mit einem der Produkte zu m Faktoren aus a, b, ... gleichartig ist. Multiplicirt man nun die Gleichung mit $(n - m)$ von den Faktoren a, b, ..., so bleiben nur diejenigen Glieder von geltendem Werthe, welche mit dem Produkte der m übrigen Faktoren jener Reihe a, b, ... gleichartig sind, indem alle andern wenigstens Einen einfachen Faktor enthalten, der mit den neu hinzutretenden Faktoren gleichartig ist, also bei dieser Multiplikation verschwinden. Nun kann man aber wiederum nach § 81 die hinzugetretenen Faktoren hinweglassen, indem das System, dem die übrigen angehören, von dem System der hinzutretenden unabhängig ist. Man erhält auf diese Weise einen Verein richtiger Gleichungen, wenn man, nachdem die ursprüngliche Gleichung auf die angegebene Weise umgestaltet ist, jedesmal die gleichartigen Glieder zu einer Gleichung vereinigt. Und da die sämmtlichen so gewonnenen Gleichungen bei ihrer Addition die ursprüngliche wiedergeben, so haben wir einen Verein von Gleichungen gewonnen, welcher die ursprüngliche genau ersetzt, und die Aufgabe ist gelöst. Somit haben wir den Satz:

Wenn man in einer Gleichung m-ter Stufe, deren Glieder einem Systeme n-ter Stufe angehören, jeden einfachen Faktor eines jeden Gliedes als Summe darstellt, deren Stücke n von einander unabhängigen Strecken gleichartig sind, und durchmultiplicirt, so kann man jede Reihe von gleichartigen Gliedern, welche daraus hervorgehen, zu Einer Gleichung zusammen-

fassen und erhält dadurch einen Verein von Gleichungen, welcher die ursprüngliche ersetzt.

Oder, da jede dieser Gleichungen ersetzt wird durch eine Gleichung, welche aus der ursprünglichen durch Multiplikation mit $(n-m)$ von den Faktoren $a, b, \ldots$ hervorgeht,

wenn man eine Gleichung m-ter Stufe, deren Glieder einem Systeme n-ter Stufe angehören, nach und nach mit jedem Produkt zu $(n-m)$ Faktoren, welches sich aus n von einander unabhängigen Strecken jenes Systems bilden lässt, multiplicirt, so | erhält man einen Verein von Gleichungen, 124
welcher die ursprüngliche ersetzt.

Da die Glieder, welche bei dem vorhergehenden Satze in jeder abgeleiteten Gleichung erschienen, sich unmittelbar als Abschattungen der Glieder, welche in der ursprünglichen Gleichung vorkamen, zu erkennen geben, so können wir den gewonnenen Satz auch vermittelst des Begriffs der Abschattungen aussprechen, haben jedoch für den bequemeren Ausdruck noch eine Reihe neuer Begriffe aufzustellen.

§ 87. Richtsysteme (Koordinatensysteme), Richtgebiet, Richtmasse, Hauptmass.

Nämlich die Betrachtungsweise des vorigen Paragraphen führt uns zu dem Begriffe der Koordinatensysteme oder Richtsysteme, welche wir jedoch in einem viel ausgedehnteren Sinne auffassen, als dies gewöhnlich geschieht. Auch erlaube ich mir, die sonst üblichen Benennungen, welche namentlich, wenn sie der durch die Wissenschaft geforderten Erweiterung unterworfen werden sollen, als sehr schleppend erscheinen, und überdies fremden Sprachen entlehnt sind, durch einfachere zu ersetzen.

Ich nenne die n Strecken $a, b, \ldots$, welche ein System n-ter Stufe bestimmen, (also alle von einander unabhängig sind), sofern jede Strecke des Systems durch sie ausgedrückt werden soll, die Richtmasse erster Stufe oder die Grundmasse dieses Systems, ihren Verein ein Richtsystem, die Produkte von m Grundmassen (mit Festhaltung der ursprünglichen Ordnung derselben) Richtmasse m-ter Stufe, das Richtmass n-ter Stufe das Hauptmass, die Systeme der Richtmasse m-ter Stufe endlich nennen wir Richtgebiete m-ter Stufe, die Systeme der Grundmasse ins Besondere Richtaxen (Koordinatenaxen). Ergänzende Richtmasse nennen wir solche, die mit einander multiplicirt das Hauptmass geben, und die ihnen zugehörigen Richtgebiete nennen wir gleichfalls ergänzende.

§ 88. Richtstücke, Zeiger.

Durch die in § 86 geführte Entwickelung ist klar, wie jede Ausdehnung m-ter Stufe, welche einem Systeme n-ter Stufe angehört, sich als Summe darstellen lässt von Stücken, welche den Richtmassen m-ter Stufe, die zu jenem Systeme gehören, gleichartig sind. Diese Stücke nun nennen wir Richtstücke jener Grösse, so dass also jede Grösse als Summe ihrer Richtstücke erscheint; die Zahlengrössen, welche hervorgehen, wenn die Richtstücke einer Grösse durch die entsprechenden
125 (gleichartigen) | Richtmasse dividirt werden, die Zeiger der Grösse,
125 so dass also jede Grösse als | Vielfachen-Summe*) der Richtmasse gleicher Stufe erscheint. Die Richtstücke einer Grösse erster Stufe sind es, welche sonst auch Koordinaten genannt werden. Eine Grösse im Sinne des Richtsystems abschatten (projiciren), heisst, sie auf eins der Richtgebiete gemäss dem ergänzenden Richtgebiete abschatten.

§ 89. Gleichungen zwischen den Richtstücken und zwischen den Zeigern.

Wenden wir diese Begriffe auf die in § 86 aufgestellten Sätze an, so gehen dieselben in folgende über:

In einer Gleichung kann man statt aller Glieder die Richtstücke oder Zeiger derselben setzen, welche einem beliebigen, aber alle demselben Richtmasse zugehören, und führt man dies in Bezug auf alle Richtmasse derselben Stufe aus, so erhält man einen Verein von Gleichungen, welcher die gegebene ersetzt.

Die in § 86 abgeleiteten Gleichungen sind nämlich eben diese Gleichungen zwischen den Richtstücken, und aus ihnen erhält man die Zeigergleichungen durch Division mit dem jedesmal zugehörigen Richtmasse.**) Ferner:

Aus einer Gleichung kann man einen sie ersetzenden Verein von Gleichungen ableiten, indem man jene Gleichung nach und nach mit den sämmtlichen Richtmassen, deren Stufenzahl die der Gleichung zu der des Hauptsystems ergänzt, multiplicirt.

---

*) Jedes Produkt einer Grösse in eine Zahlengrösse nennen wir nämlich ein Vielfaches der ersteren, und unterscheiden davon das Mehrfache, bei welchem jene Zahlengrösse eine ganze Zahl sein muss.

**) Diese Zeigergleichungen, als Gleichungen zwischen blossen Zahlengrössen, vermitteln am vollständigsten den Uebergang zur Arithmetik.

§ 90. Abschattungen einer Gleichung im Sinne eines Richtsystems. Ausdruck für den Zeiger.

Wenn wir eine als Summe ihrer Richtstücke dargestellte Grösse m-ter Stufe mit einem Richtmasse von ergänzender, das heisst $(n-m)$-ter Stufe multipliciren, so fallen alle Richtstücke bis auf eins weg, und dies eine erscheint daher als Abschattung jener Grösse auf das Richtgebiet m-ter Stufe gemäss dem ergänzenden Richtgebiete, und alle Richtstücke jener Grösse erscheinen also als im Sinne des Richtsystems erfolgte Abschattungen auf die verschiedenen Richtgebiete gleicher Stufe. Wir können daher sagen,

eine Gleichung m-ter Stufe werde ersetzt durch einen Verein von Gleichungen, welche durch Abschattung auf die verschiedenen Richtgebiete 126
*m-ter Stufe im Sinne des Richtsystems hervorgehen.**)

Zugleich ergiebt sich hieraus ein einfacher analytischer Ausdruck für die Richtstücke oder Zeiger einer Grösse. Es werde nämlich das einem Richtmasse A zugehörige Richtstück P' einer Grösse P gesucht, B sei das zu A gehörige ergänzende Richtmass, so hat man, da P' die Abschattung von P auf A nach B ist (s. § 85),

$$P' = \frac{P \, . \, B}{A \, . \, B} A,$$

also ist der zugehörige Zeiger gleich

$$\frac{P \, . \, B}{A \, . \, B},$$

das heisst:

der einem Richtmass A zugehörige Zeiger einer Grösse ist gleich einem Bruche, dessen Zähler das Produkt der Grösse in das ergänzende Richtmass und dessen Nenner das Produkt jenes ersten Richtmasses in das ergänzende ist.

B. Anwendungen.

§ 91. Abschattung in der Geometrie.

Wenden wir die in diesem Kapitel entwickelten Begriffe auf die Geometrie an, so ergiebt sich zunächst für die Ebene nur Eine Art der Projektion (Abschattung)**), indem eine Strecke auf eine gegebene

---

*) Dass eine Gleichung m-ter Stufe in einem System n-ter Stufe durch so viel einfache Gleichungen ersetzt werde, als es Kombinationen aus n Elementen zur m-ten Klasse gebe, bedarf wohl kaum einer Erwähnung.

**) Wir ziehen bei dieser Anwendung wieder den Namen der Projektion vor, aus Gründen, die späterhin von selbst einleuchten werden.

gerade Linie nach einer gegebenen Richtung projicirt werden kann. Das Richtsystem für die Ebene bietet nur zwei Grundmasse und zwei ihnen zugehörige Richtaxen dar. Als Hauptmass erscheint der Flächenraum des von den beiden Grundmassen gebildeten Spathecks (Parallelogramms).

Im Raume treten drei Arten der Projektion hervor, nämlich es werden entweder Strecken oder Flächenräume auf eine gegebene Ebene nach einer gegebenen Richtung projicirt, oder es werden Strecken auf eine gegebene gerade Linie parallel einer gegebenen Ebene projicirt. Das Richtsystem für den Raum bietet drei Grundmasse und drei ihnen zugehörige Richtaxen dar, ferner drei Richtebenen als Richtgebiete
127 zweiter | Stufe, und drei ihnen zugehörige Richtmasse zweiter Stufe, welche die Flächenräume der aus je zwei Grundmassen beschriebenen Spathecke mit Festhaltung der Richtungen ihrer Ebenen darstellen. Als Hauptmass erscheint das von den drei Grundmassen beschriebene Spath (Parallelepipedum). Interessant erscheint hier besonders die Darstellung eines Flächenraums von bestimmter Richtung als Summe seiner Richtstücke, nämlich als Summe dreier Flächenräume, welche den drei Richtebenen angehören. Da die Sätze, welche sich über Projektionen und Richtsysteme in der Geometrie aufstellen lassen, in unserer Wissenschaft schon ganz in der Form aufgestellt sind, in welcher sie für die Geometrie auszusprechen wären, so können wir uns der Wiederholung derselben hier überheben.

§ 92. Verwandlung der Koordinaten.

Dagegen wollen wir das Problem der Koordinatenverwandlung zunächst für die Geometrie und demnächst auch allgemein für unsre Wissenschaft lösen.

Es seien a, b, c drei Grundmasse und e_1, e_2, e_3 drei neue von einander unabhängige Grundmasse, welche als Vielfachensummen jener ursprünglichen Grundmasse gegeben sind, so ist nun die Aufgabe: eine Grösse p, einestheils, wenn sie als Vielfachensumme der ursprünglichen Grundmasse gegeben ist, als Vielfachensumme der neuen Grundmasse darzustellen, und umgekehrt, wenn sie in der letzteren Form gegeben ist, sie in der ersteren darzustellen; in beiden Fällen sind die Zeiger zu suchen. Diese Aufgaben sind nun in der That durch den Satz in § 90, welcher die Zeiger finden lehrt, gelöst. Danach ist in Bezug auf die erste Aufgabe der zu e_1 gehörige Zeiger von p gleich

$$\frac{p \cdot e_2 \cdot e_3}{e_1 \cdot e_2 \cdot e_3}$$

und in Bezug auf die zweite der zu a gehörige Zeiger von p gleich

$$\frac{p\,.\,b\,.\,c}{a\,.\,b\,.\,c}$$

und durch diese so höchst einfachen Ausdrücke ist das Problem der Koordinatenverwandlung in seiner grössten Allgemeinheit gelöst.

Die zweite Aufgabe ist besonders bei der Theorie der Kurven und Oberflächen von Wichtigkeit, indem dieselben dadurch bestimmt werden, dass zwischen den Zeigern einer Strecke, welche von einem als Anfangspunkt der Koordinaten angenommenen Punkte nach einem Punkte 128
der Kurve oder Oberfläche gezogen ist, eine Gleichung aufgestellt wird. Es sei $p = xa + yb + zc$ diese Strecke, und

$$f(x, y, z) = 0$$

die Gleichung, welche eine Oberfläche bestimmt; sucht man nun die Gleichung derselben Oberfläche zunächst für denselben Anfangspunkt der Koordinaten, aber in Bezug auf neue Richtaxen und auf die ihnen zugehörigen Richtmasse, e_1, e_2, e_3, so hat man, wenn

$$p = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3$$

ist, die Gleichung

$$f\left(\frac{p\,.\,b\,.\,c}{a\,.\,b\,.\,c},\ \frac{a\,.\,p\,.\,c}{a\,.\,b\,.\,c},\ \frac{a\,.\,b\,.\,p}{a\,.\,b\,.\,c}\right) = 0,$$

eine Gleichung, welche, wenn man statt p seinen Werth substituirt, als Gleichung zwischen den neuen Variabeln u_1, u_2, u_3 erscheint. Will man auch den Anfangspunkt der Koordinaten etwa um die Strecke c verlegen, so hat man nun, wenn q die Strecke ist von dem neuen Anfangspunkt nach demselben Punkte der Oberfläche, nach welchem der entsprechende Werth von p gerichtet, und

$$q = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3$$

ist, nur in der obigen Gleichung statt p seinen Werth $q + c$ einzuführen, um die verlangte Gleichung zu erhalten, oder ist

$$c = \alpha a + \beta b + \gamma c,$$

so hat man, wie sich sogleich ergiebt,

$$f\left(\frac{q\,.\,b\,.\,c}{a\,.\,b\,.\,c} + \alpha,\ \frac{a\,.\,q\,.\,c}{a\,.\,b\,.\,c} + \beta,\ \frac{a\,.\,b\,.\,q}{a\,.\,b\,.\,c} + \gamma\right) = 0$$

als die verlangte Gleichung zwischen den neuen Variabeln v_1, v_2, v_3. Will man diese Gleichung als blosse Zahlengleichung darstellen, so hat man nur die neuen Grundmasse auf bestimmte Weise als Vielfachensummen der ursprünglichen darzustellen und in die Gleichung einzuführen. Es sei

$$e_1 = \alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 c$$
$$e_2 = \alpha_2 a + \beta_2 b + \gamma_2 c$$
$$e_3 = \alpha_3 a + \beta_3 b + \gamma_3 c,$$

so zeigt sich unmittelbar, wie sich die verlangte Gleichung darstellt in der Form

$$f(\alpha + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3, \quad \beta + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3,$$
$$\gamma + \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \gamma_3 v_3) = 0,$$

129 eine Gleichung, welche an Einfachheit nichts zu wünschen übrig | lässt.

Für den allgemeinsten Fall der abstrakten Wissenschaft ergiebt sich die Lösung unserer Aufgabe mit derselben Leichtigkeit. In der That, ist eine Grösse P als Vielfachensumme gewisser Richtmasse gegeben, und man will dieselbe als Vielfachensumme anderer Richtmasse ausdrücken, so hat man den zu einem derselben, A gehörigen Zeiger, wenn B das zu A gehörige ergänzende Richtmass ist, nach § 90 gleich

$$\frac{P.B}{A.B}.$$

§ 93. Elimination einer Unbekannten aus Gleichungen höherer Grade.

Was nun die Anwendung auf die Theorie der Gleichungen betrifft, so haben wir schon oben (§ 45) die Methode, Gleichungen des ersten Grades mit mehreren Unbekannten durch Hülfe unserer Analyse aufzulösen, vorweggenommen. Wir setzen diesen Gegenstand hier fort, indem wir die durch unsere Wissenschaft dargebotene Methode, aus Gleichungen höherer Grade mit mehreren Unbekannten die Unbekannten zu eliminiren, darlegen.

Es seien zwei Gleichungen höherer Grade mit mehreren Unbekannten gegeben, es soll eine derselben, etwa y, eliminirt, also eine Gleichung zwischen den übrigen Unbekannten aufgestellt werden. Die gegebenen Gleichungen seien nach Potenzen von y geordnet:

$$a_m y^m + \cdots + a_1 y + a_0 = 0$$
$$b_n y^n + \cdots + b_1 y + b_0 = 0,$$

wo $a_m, \ldots, a_0$ und $b_n, \ldots, b_0$ beliebige Funktionen der andern Unbekannten sind, a_0 und b_0 aber nicht gleich Null sein sollen. Multiplicirt man die erste Gleichung nach der Reihe mit $y, y^2, \ldots, y^n$, die letzte nach und nach mit $y, y^2, \ldots, y^m$, so erhält man $m + n$ neue Gleichungen. Betrachtet man die Koefficienten einer jeden dieser $m + n$ Gleichungen als unter sich gleichartig, hingegen die der verschiedenen Gleichungen als von einander unabhängig (auch wenn sie bis dahin mit demselben Buchstaben bezeichnet waren), so erhält man, wenn man die so aufgefassten Gleichungen im Sinne unserer Wissenschaft addirt, eine Gleichung von der Form

$$c_{m+n}\, y^{m+n} + \cdots + c_1 y = 0.$$

Multipliciren wir diese Gleichung mit dem äusseren Produkt $e_2 \,.\, e_3 \ldots e_{m+n}$, so fallen alle Glieder bis auf das letzte nach den | Ge- 130
setzen der äusseren Multiplikation weg, und wir erhalten die Gleichung

$$e_1 \,.\, e_2 \,.\, e_3 \ldots e_{m+n} y = 0,$$

oder, da y nicht null sein kann, weil dann in den gegebenen Gleichungen wider die Voraussetzung a_0 und b_0 gleich Null sein würden, so hat man

$$e_1 \,.\, e_2 \,.\, e_3 \ldots e_{m+n} = 0$$

als die verlangte Eliminationsgleichung.

Zweiter Abschnitt.

Die Elementargrösse.

Erstes Kapitel.

Addition und Subtraktion der Elementargrössen erster Stufe.

A. Theoretische Entwickelung.

§ 94. Gesetz über die Summe der Strecken, welche von einem veränderlichen Elemente nach einer Reihe fester Elemente gezogen sind.

131 Ich knüpfe den Begriff der Elementargrössen an die Lösung einer einfachen Aufgabe, durch die ich zuerst zu diesem Begriffe gelangte, und die mir überhaupt zu dessen genetischer Entwickelung am geeignetsten zu sein scheint.

Aufgabe. Es seien drei Elemente α_1, α_2, β_1 und ausserdem ein Element ϱ gegeben; man soll das Element β_2 finden, welches der Gleichung

$$[\varrho\alpha_1] + [\varrho\alpha_2] = [\varrho\beta_1] + [\varrho\beta_2]$$

genügt.

Auflösung. Schafft man die Glieder der linken Seite auf die rechte, so hat man, da

$$-[\varrho\alpha] = [\alpha\varrho], \text{ und } [\alpha\varrho] + [\varrho\beta] = [\alpha\beta]$$

ist, die Gleichung

$$[\alpha_1\beta_1] + [\alpha_2\beta_2] = 0,$$

durch welche das Element β_2 auf eine einfache Weise bestimmt ist.

Um dies Resultat der Anschauung näher zu bringen, wollen wir es auf die Geometrie anwenden, und also die Elemente als Punkte annehmen; so finden wir den Punkt β_2, indem wir $[\alpha_2\beta_2]$ entgegengesetzt gleich mit $[\alpha_1\beta_1]$ machen. — Das Interessante bei dieser Auflösung

ist, dass das Element β_2 ganz unabhängig | von ϱ bestimmt ist, und 132
da wir aus der letzten Gleichung, welche in der Auflösung vorkommt, durch das umgekehrte Verfahren wieder die erste in Bezug auf jedes beliebige ϱ ableiten können, so haben wir zugleich den Satz, dass, wenn die Gleichung

$$[\varrho\alpha_1] + [\varrho\alpha_2] = [\varrho\beta_1] + [\varrho\beta_2]$$

für irgend einen Punkt ϱ gilt, sie auch für jeden andern Punkt gilt, der statt ϱ eingeführt werden mag.

Dieser Satz lässt sich direkt ableiten, doch wollen wir ihn vorher verallgemeinern; denn es ist klar, wie das angegebene Verfahren auch noch anwendbar bleibt, wenn man statt der zwei Elemente α_1, α_2 und β_1, β_2 beliebig viele, nur auf beiden Seiten eine gleiche Anzahl, einführt, ja, da unter den Elementen beliebig viele zusammen fallen können, auch dann noch, wenn zu den Strecken auf beiden Seiten beliebige Koefficienten hinzutreten, sobald nur die Summe dieser Koefficienten auf beiden Seiten dieselbe ist. In der That, es sei

$$i_1[\varrho\alpha_1] + \cdots + i_n[\varrho\alpha_n] = k_1[\varrho\beta_1] + \cdots + k_m[\varrho\beta_m],$$

wo die Grössen $i_1, \ldots$ und $k_1, \ldots$ Zahlengrössen darstellen, und es sei zugleich

$$i_1 + \cdots + i_n = k_1 + \cdots + k_m,$$

so können wir zeigen, dass die erste Gleichung auch fortbesteht für jeden Punkt σ, der statt ϱ eingeführt wird. Denn es ist

$$[\varrho\alpha] = [\varrho\sigma] + [\sigma\alpha], \quad [\varrho\beta] = [\varrho\sigma] + [\sigma\beta].$$

Führt man diese Ausdrücke in Bezug auf die betreffenden Zeiger $(1 \ldots n,\ 1 \ldots m)$ in die obige Gleichung ein, löst die Klammern auf und fasst die Glieder, welche $[\varrho\sigma]$ enthalten, auf jeder Seite zusammen, so erhält man auf jeder Seite $[\varrho\sigma]$ multiplicirt mit der Summe der Koefficienten, und da diese auf beiden Seiten gleich ist, so hebt sich das so gewonnene Glied auf beiden Seiten auf, und man behält

$$i_1[\sigma\alpha_1] + \cdots + i_n[\sigma\alpha_n] = k_1[\sigma\beta_1] + \cdots + k_m[\sigma\beta_m],$$

das heisst, die Gleichung besteht fort in Bezug auf jedes Element, was statt ϱ eingeführt werden mag. Also:

Wenn man von einem Elemente ϱ Strecken nach beliebig vielen festen Elementen zieht, und zwei beliebige Vielfachensummen derselben, deren Koefficienten aber gleiche Summe haben, einander gleich sind, so besteht diese Gleichheit fort, wie sich auch das Element ϱ ändern mag.

Ist ins Besondere die Summe der Koefficienten in dem Ausdrucke 133

$$i_1[\varrho\alpha_1] + \cdots + i_n[\varrho\alpha_n]$$

null, so ergiebt sich, indem man auf die oben angegebene Weise, nämlich statt $[\varrho\alpha]$ überall $[\varrho\sigma] + [\sigma\alpha]$, substituirt, jener Ausdruck gleich

$$i_1 [\sigma\alpha_1] + \cdots + i_n [\sigma\alpha_n],$$

weil nämlich das Glied $(i_1 + \cdots + i_n) [\varrho\sigma]$ wegen des ersten Faktors null wird. Also:

Wenn man von einem veränderlichen Elemente ϱ Strecken nach beliebig vielen festen Elementen zieht, so ist jede Vielfachensumme dieser Strecken, deren Koefficientensumme null ist, eine konstante Grösse.

Auch geht aus der Art, wie sich die Gleichungen dieses Paragraphen aus einander ableiten lassen, unmittelbar hervor, dass, wenn zwei beliebige Vielfachensummen jener Strecken in Bezug auf dieselben zwei Anfangselemente ϱ und σ einander gleich sind, auch ihre Koefficientensummen gleich sein, und daher ihre eigene Gleichheit bei jeder Aenderung von ϱ fortbestehen müsse, und ebenso dass, wenn eine solche Vielfachensumme in Bezug auf zwei Anfangs-Elemente ϱ und σ gleichen Werth behält, ihre Koefficientensumme null ist, und sie selbst daher bei jeder Aenderung von ϱ denselben Werth behält.

§ 95. Abweichung eines Elementes, eines Elementarvereins. Gewicht.

Um die Resultate des vorigen Paragraphen einfacher einkleiden zu können, führen wir einige Benennungen ein, die wir auch für die Geometrie festhalten.

Nämlich wir verstehen unter der *Abweichung eines Elementes α von einem Elemente ϱ* die Strecke $[\varrho\alpha]$, unter der *Gesammtabweichung einer Elementenreihe von einem Elemente ϱ* die Summe aus den Abweichungen der einzelnen Elemente jener Reihe von dem Elemente ϱ. Fallen unter jenen Elementen mehrere (m) in eins (α) zusammen, so wird auch die Abweichung $[\varrho\alpha]$ dieses Elementes ebenso oft (m-mal) in jener Summe vorkommen. Hierdurch gelangen wir zu einer Erweiterung des Begriffs; nämlich, nennen wir einen Verein von Elementen, deren jedes mit einer bestimmten Zahlengrösse behaftet ist, einen *Elementarverein*, so werden wir unter der *Gesammtabweichung eines Elementarvereins von einem Elemente ϱ* eine Vielfachensumme aus den Abweichungen der jenem Vereine angehörigen Elemente von dem Ele-
134 ment ϱ verstehen müssen, deren Koefficienten die Zahlengrössen | sind, mit welchen die zugehörigen Elemente behaftet sind. Die Summe dieser Zahlengrössen nennen wir das *Gewicht*) des Elementarvereins,*

*) Der Name „Gewicht" ist auch sonst in der Mathematik (in der Wahrscheinlichkeitsrechnung) im abstrakten Sinne gebräuchlich, und bedarf wohl hier keiner Rechtfertigung.

so wie die Zahlengrössen, mit welchen die einzelnen Elemente behaftet sind, die ihnen zugehörigen Gewichte. Besteht also der Elementarverein aus den Elementen $\alpha, \beta, \ldots$ und den zugehörigen Gewichten $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots$, so ist die Abweichung jenes Elementarvereins von einem Elemente ϱ gleich

$$\mathfrak{a}\,[\varrho\alpha] + \mathfrak{b}\,[\varrho\beta] + \cdots.$$

Somit haben wir denn die Sätze:

*Wenn zwei Elementarvereine von demselben Elemente um Gleiches**) *abweichen, und ihr Gewicht gleich ist, oder wenn sie von denselben zwei Elementen um Gleiches abweichen, so weichen sie auch von jedem andern Elemente um Gleiches ab, und im letztern Falle ist ihr Gewicht gleich,*

und

*Ein Elementarverein, dessen Gewicht null ist, weicht von je zwei Elementen um Gleiches ab, und ein Elementarverein, welcher von zwei Elementen um Gleiches abweicht, hat Null zum Gewicht und weicht von allen Elementen um Gleiches ab***).

§ 96. **Begriff der Elementargrössen und ihrer Summe.**

Jedes Gebilde wird dadurch als Grösse fixirt, dass der Bereich seiner Gleichheit und Verschiedenheit bestimmt wird. Wir bezeichnen daher zwei Elementarvereine als gleiche Grössen und zwar als gleiche *Elementargrössen*, wenn ihre Abweichungen von denselben Elementen jedesmal gleichen Werth haben. Ein Elementarverein wird also zur Elementargrösse, wenn man von der besonderen Art seiner Zusammensetzung absieht, und nur die Abweichungswerthe festhält, welche er mit anderen Elementen bildet, so dass also eine Elementargrösse auf
verschiedene Weise als | Elementarverein da sein kann, und jeder Ele- 135
mentarverein als eine | besondere Verkörperung einer Elementargrösse *135*
oder, wie wir es oben bezeichneten, als elementare oder konkrete Darstellung einer Elementargrösse aufzufassen ist. Hiernach versteht es sich nun schon von selbst, dass unter der Abweichung und dem Gewichte einer Elementargrösse dasselbe zu verstehen ist, was wir unter der Abweichung und dem Gewichte des Elementarvereins verstanden, welchem sie zugehört, und dass zwei Elementargrössen nur dann gleich sein können, wenn sie gleiches Gewicht und gleiche Abweichungswerthe darbieten, dass aber die Gleichheit der Elementargrössen schon

---

*) Das heisst, die Abweichungen sollen gleich sein.

**) Dabei versteht sich von selbst, dass auch jedes einzelne Element sowohl für sich, als wenn es mit einer Zahlengrösse behaftet ist, als Elementarverein aufgefasst werden kann, indem die Gewichte der übrigen Elemente null sind.

erfolgt, wenn auch nur irgend zwei solche Werthe als gleich dargethan sind.

Unsere Aufgabe ist nun, die Art der Verknüpfung auszumitteln, in welche die verschiedenen Elemente und die zugehörigen Zahlengrössen eines Elementarvereins eingehen müssen, wenn als das Resultat der Verknüpfung die Elementargrösse erscheinen soll.

Die Verknüpfungen sind von zwiefacher Art, einestheils nämlich zwischen einem Element und der zugehörigen Zahlengrösse, dem Gewichte, andererseits zwischen den mit Gewichten behafteten Elementen und überhaupt zwischen den Elementarvereinen, sofern sie ihren Abweichungen nach betrachtet werden, das heisst zwischen den Elementargrössen unter sich.

Betrachten wir zuerst diese letzte Verknüpfungsweise, so ist klar, dass die Gesammtabweichung eines Elementarvereins dieselbe bleibt, in welcher Ordnung man die einzelnen Theile dieses Vereins nehmen, und wie man sie unter sich zu besonderen Vereinen zusammenfassen mag, und dass endlich, wenn man zu Elementarvereinen, welche verschiedene Abweichung darbieten, Elementarvereine, welche gleiche Abweichungen darbieten, hinzufügt, die so erzeugten Gesammtvereine auch verschiedene Abweichung darbieten müssen; und zwar wird dies alles der Fall sein, weil es für die Addition der Strecken gilt. Diese Vertauschbarkeit und Vereinbarkeit der Glieder, und auf der andern Seite das Gesetz, dass, wenn das eine Glied der Verknüpfung konstant bleibt, das Resultat nur dann konstant bleibe, wenn auch das andere Glied es bleibt, bestimmt jene Verknüpfung nach § 6 als eine additive, und die Gesetze der Addition und Subtraktion gelten allgemein für diese Verknüpfung.

Was nun die Verknüpfung des Elementes mit dem zugehörigen
136 Gewichte betrifft, so leuchtet ein, | dass, wenn in einem Elementar-
136 vereine | dasselbe Element mehrmals und zwar mit verschiedenen Gewichten behaftet vorkommt, man statt dessen das Element einmal und zwar mit der Summe der Gewichte behaftet setzen kann, ohne dass die Abweichung des Vereins geändert wird, wie dies aus den Gesetzen der Multiplikation von Zahlengrössen mit Strecken bekannt ist. Bezeichnet man daher vorläufig diese zweite Verknüpfungsweise durch das Zeichen $\frown$, so hat man, wenn α ein Element, m und n die Gewichte sind,

$$m \frown \alpha + n \frown \alpha = (m + n) \frown \alpha,$$

eine Gleichung, welche das multiplikative Grundgesetz in Bezug auf das erste Verknüpfungsglied darstellt, und da die Verknüpfung einer Zahlengrösse mit einem Verein aus mehreren Elementen noch nicht ihrem Begriffe nach gegeben ist, also auch die andere Seite jenes Grundgesetzes noch nicht hervortreten kann, so ist jene Verknüpfung, so weit sie überhaupt bestimmt ist, als eine multiplikative bestimmt.

Fassen wir dies zusammen, so ist die Elementargrösse eines Vereins von Elementen $\alpha, \beta, \ldots$ mit den zugehörigen Gewichten $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots$ gleich

$$\mathfrak{a}\alpha + \mathfrak{b}\beta + \cdots,$$

das heisst, sie ist als Vielfachensumme der Elemente dargestellt, deren Koefficienten die den Elementen zugehörigen Gewichte sind, und zugleich ist dadurch die Addition der Elementargrössen unter sich bestimmt.

§ 97. Vervielfachung dieser Grössen.

Um nun die multiplikative Verknüpfung allgemeiner darzustellen, haben wir die Multiplikation einer Zahlengrösse mit einer Elementargrösse so zu definiren, dass auch die andere Seite des multiplikativen Grundgesetzes fortbesteht; dies geschieht, indem wir festsetzen, dass eine Vielfachensumme von Elementen mit einer Zahlengrösse multiplicirt werde, wenn man die Koefficienten derselben mit dieser Zahlengrösse multiplicirt.

Nämlich dann ergiebt sich sogleich, wenn a und b beliebige Elementargrössen, das heisst Vielfachensummen von Elementen darstellen, die Geltung der beiden multiplikativen Grundgesetze

$$ma + na = (m + n)\, a$$

und

$$ma + mb = m\,(a + b).$$

Dass nun auch das Resultat der Division mit einer Zahlengrösse, | so- 137
bald diese nicht null ist, ein bestimmtes sei, ergiebt sich leicht, indem verschiedene Elementargrössen, das heisst solche, deren Abweichungen von denselben Elementen Verschiedenheiten darbieten, auch nachdem sie mit derselben Zahlengrösse, die nicht null ist, multiplicirt sind, verschiedene Abweichungen darbieten müssen, also verschieden bleiben. Und ebenso leicht ergiebt sich auch, dass, wenn wir *gleichartige Elementargrössen* solche nennen, welche aus derselben Elementargrösse durch Multiplikation mit Zahlengrössen hervorgegangen sind, der Quotient zweier gleichartiger Elementargrössen, wenn nicht der Divisor null ist, eine bestimmte Zahlengrösse liefert. Somit gelten alle Gesetze arithmetischer Multiplikation und Division für die fragliche Verknüpfung.

Die Verknüpfung des Elementes ϱ mit andern Elementen oder Elementargrössen, wie sie bei der oben eingeführten Bezeichnung der Abweichung eintritt, behalten wir dem folgenden Kapitel vor.

§ 98. **Die Elementargrösse als vielfaches Element.**

Es erschien bisher die Elementargrösse im Allgemeinen als eine Vielfachensumme von Elementen, und wir müssen uns die Aufgabe stellen, eine Elementargrösse, welche in dieser Form gegeben ist, in möglichst einfacher Form darzustellen.

Zunächst machen wir den Versuch, sie in Einem Gliede, also als vielfaches Element darzustellen. Es sei daher

$$\mathfrak{a}\alpha + \mathfrak{b}\beta + \cdots = x\sigma$$

gesetzt, wo σ ein Element, x sein Gewicht bezeichnet; da das Gesammtgewicht auf beiden Seiten gleich sein muss, so erhalten wir sogleich

$$x = \mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \cdots,$$

und wir haben nur noch σ so zu bestimmen, dass die Gesammtabweichung von irgend einem Elemente ϱ auf beiden Seiten gleich ist, und erhalten

$$\mathfrak{a}\,[\varrho\alpha] + \mathfrak{b}\,[\varrho\beta] + \cdots = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \cdots)\,[\varrho\sigma],$$

das heisst

$$[\varrho\sigma] = \frac{\mathfrak{a}\,[\varrho\alpha] + \mathfrak{b}\,[\varrho\beta] + \cdots}{\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \cdots},$$

wodurch σ bestimmt ist, sobald $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \cdots$ einen geltenden Werth hat, das heisst:

Eine Elementargrösse, deren Gewicht nicht null ist, lässt sich als ein
138 *mit gleichem Gewichte behaftetes Element darstellen, | und zwar ist die Abweichung dieses Elementes von einem Elemente ϱ gleich der durch das Gewicht dividirten Abweichung der Elementargrösse von demselben Elemente.*

Setzt man übrigens in jener Gleichung, welche für jedes Element ϱ gilt, dies Element mit σ identisch, so hat man, weil $[\sigma\sigma]$ null ist, mit Weglassung des Divisors die Gleichung

$$0 = \mathfrak{a}\,[\sigma\alpha] + \mathfrak{b}\,[\sigma\beta] + \cdots,$$

das heisst, die Gesammtabweichung einer Vielfachensumme von Elementen von dem Summenelement (σ) ist gleich Null.

§ 99. **Die Elementargrösse mit dem Gewichte Null ist eine Strecke.**

Ist das Gewicht der Elementargrösse null, so haben wir schon gezeigt, dass dann die Abweichungen der Elementargrösse von je zwei Elementen gleich gross sind; ist diese Abweichung daher in Bezug auf irgend ein Element null, so ist sie es auch in Bezug auf jedes andere, und jene Elementargrösse kann dann einem beliebigen Elemente mit dem Gewichte Null gleichgesetzt werden, wie dies auch die Formel des vorigen Paragraphen schon darlegt, oder sie kann selbst gleich Null gesetzt werden. Ist aber die Abweichung einer solchen Elementargrösse (deren Gewicht null ist) von irgend einem Elemente gleich einer Strecke von geltender Grösse, so ist auch die Abweichung derselben von jedem andern Elemente derselben Strecke gleich, und diese Strecke, welche jene konstante Abweichung misst, repräsentirt daher jene Elementargrösse vollständig, so dass zu gleichen Elementargrössen, deren Gewichte null sind, auch gleiche Abweichungswerthe gehören, und umgekehrt.

Werden nun solche Elementargrössen zu einander addirt oder mit Zahlengrössen multiplicirt, so geht der Abweichungswerth des Resultates aus denen jener Elementargrössen durch dieselbe Addition oder Multiplikation hervor, es tritt also zwischen solchen Elementargrössen und ihren Abweichungswerthen weder an sich, das heisst in ihrem Begriffsumfange, noch in ihren Verknüpfungen, irgend ein Unterschied hervor, und wir sind somit berechtigt, jene Elementargrösse und ihren Abweichungswerth als gleich zu definiren, ja wir sind dazu gezwungen, wenn wir nicht durch unnütze Unterscheidungen den Gegenstand verwirren wollen. *Wir setzen daher eine Elementargrösse, deren Gewicht null ist, derjenigen konstanten Strecke gleich, um welche jene Grösse von
beliebigen Elementen abweicht*, oder, *wir verstehen unter der | Abweichung* 139
einer Strecke von einem Element jene Strecke selbst, und die Strecke | er- 139
scheint als eine besondere Art von Elementargrössen.

Um dies noch anschaulicher zu übersehen, können wir zunächst nachweisen, dass sich jede Elementargrösse, deren Gewicht null ist, als Differenz zweier Elemente $(\beta - \alpha)$ darstellen lässt, deren eins (α) willkührlich ist. In der That, da das Gesammtgewicht dieser Differenz gleichfalls null ist, so kommt es nur darauf an, dass in Bezug auf irgend ein Element (ϱ) die Abweichungen gleich sind. Die Abweichung jener Differenz von ϱ ist $[\varrho\beta] - [\varrho\alpha]$, das heisst sie ist gleich $[\alpha\beta]$, und dadurch ist nicht bloss das Element β bestimmt, wenn α gegeben ist, sondern auch die konstante Abweichung der gegebenen Elementargrösse selbst gefunden, und es folgt daraus ferner, dass

$$[\alpha\beta] = \beta - \alpha$$

ist. Beide stellen also nur verschiedene Bezeichnungen dar, und da die erstere willkührlich, die letztere nothwendig ist, so werden wir von jetzt an am liebsten jene von Anfang an nur als vorläufig dargestellte Bezeichnung gegen die letzte fallen lassen, und also künftig eine Strecke, welche, wenn α als ihr Anfangselement gesetzt wird, β zum Endelement hat, mit $\beta - \alpha$ bezeichnen*).

Fassen wir das Ergebniss beider Paragraphen zusammen, so zeigt sich,

dass eine Elementargrösse erster Stufe, denn so bezeichnen wir die bisher behandelte Elementargrösse im Gegensatz gegen die später zu behandelnden, *sich, wenn ihr Gewicht einen geltenden Werth hat, als vielfaches Element, wenn ihr Gewicht null ist, als Strecke darstellen lässt, und zwar erhält man jedesmal diesen Werth, indem man die Gewichte und die Abweichungen von irgend einem Elemente gleichsetzt, wobei die Abweichung einer Strecke von einem Elemente jener Strecke selbst gleich gesetzt, und das Gewicht einer Strecke null gesetzt wird.*

§ 100. Summe einer Strecke und eines einfachen oder vielfachen Elementes.

140 Da nach dem vorigen Paragraphen die Strecke als eine besondere
140 Gattung von Elementargrössen erster Stufe erschien, so lässt sich | die Summe einer Strecke und eines einfachen oder vielfachen Elementes gleichfalls als Elementargrösse auffassen, und den Begriff dieser Summe, der durch das Frühere schon bestimmt ist, wollen wir nun näher vor Augen rücken.

Suchen wir zuerst die Summe $(\alpha + p)$ eines Elementes α und einer Strecke p, so muss, da das Gewicht dieser Summe Eins ist, dieselbe wieder gleich einem einfachen Elemente β gesetzt werden. Man hat dann aus der Gleichung

$$\alpha + p = \beta$$

die neue Gleichung

$$\beta - \alpha = p,$$

das heisst $\alpha + p$ bedeutet das Element β, in welches α übergeht, wenn es sich um p ändert, oder dessen Abweichung von α gleich p ist. Betrachten wir die Summe eines vielfachen Elementes $m\alpha$ und einer Strecke p, so haben wir, da das Gewicht der Summe m ist, die Gleichung

$$m\alpha + p = m\beta$$

und daraus

$$m(\beta - \alpha) = p,$$

oder

---

*) Es ist hier noch zu erwähnen, dass die Formel des vorigen Paragraphen für diesen Fall die Elementargrösse als unendlich entferntes Element mit dem Gewichte Null darstellt, falls man nämlich die Division mit Null gelten lassen will; aber die bestimmte Bedeutung dieses Ausdrucks tritt eben erst durch die hier gegebene Darstellung ans Licht.

$$\beta - \alpha = \frac{p}{m},$$

das heisst $m\alpha + p$ bedeutet das m-fache eines Elementes β, dessen Abweichung von α der m-te Theil der Strecke p ist. Oder fassen wir beides zusammen und drücken es auf allgemeinere Weise aus, indem wir zugleich bedenken, dass, wenn β von α um $\frac{p}{m}$ abweicht, dann $m\beta$ von α um p abweiche, so ergiebt sich,

dass die Summe einer Elementargrösse von geltendem Gewichtswerthe und einer Strecke eine Elementargrösse ist, welche mit der ersteren gleiches Gewicht hat, und von dem Elemente der ersteren um die hinzuaddirte Strecke abweicht.

B. Anwendungen.

§ 101. **Mitte eines Punktvereins.**

Wollen wir die in diesem Kapitel gewonnenen Resultate auf die Geometrie anwenden, so haben wir nur statt der Elemente uns Punkte vorzustellen; und behalten wir dann die übrigen Benennungen, welche in diesem Kapitel eingeführt wurden, namentlich die Benennungen „Gewicht, Abweichung, Elementargrösse" | hier in derselben Bedeutung *141*
bei, so erhalten wir auch dieselben Sätze, von denen wir jedoch die interessantesten in anschaulicherer | Form darlegen wollen. 141

Stellt man sich zunächst n Punkte $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ vor, so lässt sich stets ein Punkt σ finden, dessen Abweichung von jedem beliebigen Punkte ϱ der n-te Theil ist von der Gesammtabweichung jener n Punkte von demselben Punkte ϱ, und dieser Punkt ist durch eine solche Gleichung

$$[\varrho\sigma] = \frac{[\varrho\alpha_1] + \cdots + [\varrho\alpha_n]}{n}$$

vollkommen bestimmt. Dieser Punkt ist es, welchen man den Punkt der mittleren Entfernung zwischen jenen n Punkten zu nennen pflegt, den ich aber kürzer als deren *Mitte* bezeichnet habe (vgl. § 24). Drücken wir nun den obigen Satz geometrischer aus, so können wir sagen:

Zieht man von einem veränderlichen Punkte ϱ die Strecken nach n festen Punkten, so geht die von ϱ aus mit der Summe dieser Strecken gezogene Parallele durch einen festen Punkt σ, welcher die Mitte zwischen jenen n Punkten heisst, und dessen Entfernung von ϱ der n-te Theil jener Summe ist.

Oder, wenn wir auch den Begriff der Summe vermeiden wollen:

Zieht man von einem veränderlichen Punkte ϱ die Strecken nach n festen Punkten, und legt diese Strecken, ohne ihre Richtung und Länge zu ändern, stetig, das heisst so an einander, dass der Endpunkt einer jeden Strecke jedesmal der Anfangspunkt der nächstfolgenden wird, und macht ϱ zum Anfangspunkt der ersten, so geht die Linie, welche die so gebildete Figur schliesst, durch einen festen Punkt σ, welcher die Mitte der n Punkte heisst und von der schliessenden Seite nach dem Punkte ϱ zu den n-ten Theil abschneidet.

Hieraus ergiebt sich eine höchst einfache Konstruktion der Mitte, und zugleich das Gesetz, dass die Strecken, welche von der Mitte nach den n Punkten gezogen werden, stetig an einander gelegt eine geschlossene Figur geben, oder dass sie den Seiten einer geschlossenen Figur gleich und parallel sind.

§ 102. Die Mitte als Axe.

Es ist klar, wie die im vorigen Paragraphen aufgestellten Gesetze auch noch gelten, wenn sich mehrere der festen Punkte vereinigen, wenn man dann nur die Anzahl derselben festhält, und auch dann
142 noch, wenn man diese Punkte mit beliebigen positiven oder | negativen Zahlengrössen, welche wir auch hier Gewichte nennen können, multiplicirt denkt, so lange nur die Summe der Gewichte einen geltenden Werth hat; nennen wir dann wieder die Gesammtheit der so
142 mit | Gewichten behafteten Punkte einen Punktverein, so können wir den Satz aussprechen: „Wenn man von einem veränderlichen Punkte ϱ nach den Punkten eines festen Punktvereins Strecken zieht, diese Strecken, ohne ihre Richtung zu ändern, mit den zugehörigen Gewichten multiplicirt, und die so gewonnenen Strecken von ϱ aus stetig an einander legt, so geht die die Figur schliessende Seite durch einen festen Punkt σ, welcher die Mitte jenes Punktvereins ist, und dessen Entfernung von ϱ so oft in der schliessenden Seite enthalten ist, als das Gesammtgewicht beträgt."

Ist das Gesammtgewicht null, so fällt, wie sich aus der Formel

$$[\varrho\sigma] = \frac{\mathfrak{a}[\varrho\alpha] + \mathfrak{b}[\varrho\beta] + \cdots}{\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \cdots}$$

ergiebt, der Punkt σ ins Unendliche, und die schliessende Seite geht dann durch denselben unendlich entfernten Punkt, das heisst, hat eine konstante Richtung. Dies ergiebt sich noch einfacher und zugleich bestimmter aus den Sätzen, die wir für den Fall, dass das Gesammtgewicht null ist, oben aufgestellt hatten, und es folgt daraus zugleich, dass diese schliessende Seite zugleich eine konstante Länge hat. Es erscheint also als Mitte des Punktvereins, wenn das Gesammtgewicht null ist, ein unendlich entfernter Punkt, oder was dasselbe ist, eine konstante Richtung, also nicht ein (endlich liegender) Mittelpunkt, sondern eine Mittelaxe. Da dieser Fall ein besonderes Interesse darbietet, so sprechen wir ihn noch einmal mit möglichster Vermeidung aller Kunstausdrücke aus:

Zieht man von einem veränderlichen Punkte ϱ die Strecken nach einer Reihe fester Punkte, zu welchen eine Reihe von Zahlengrössen, deren Summe null ist, gehört, und man legt diese Strecken, nachdem man sie, ohne ihre Richtung zu verändern, mit den zugehörigen Zahlen multiplicirt hat, stetig an einander, so hat die schliessende Seite konstante Richtung und Länge, und kann die A x e *jenes Punktvereins genannt werden*).*

§ 103. **Schwerpunkt. Axe des Gleichgewichts.**

In Bezug auf die Statik stellen wir sogleich das Hauptgesetz auf, *143*
nämlich

Wenn die Punkte eines Vereins von parallelen Kräften gezogen | werden, 143
welche den Gewichten jener Punkte proportional, aber von veränderlicher Richtung sind, so ist das Gesammtmoment jener Kräfte in Bezug auf die Mitte jenes Vereins null, in Bezug auf jeden andern Punkt gleich dem Moment der an der Mitte angebrachten Gesammtkraft.

Der Beweis ist höchst einfach. Ist nämlich σ die Mitte des Vereins $\mathfrak{a}\alpha$, $\mathfrak{b}\beta$, ..., und sind $\mathfrak{a}p$, $\mathfrak{b}p$, ... die Kräfte, durch welche die Punkte α, β, ... gezogen werden, so hat man das Gesammtmoment in Bezug auf σ gleich

$$\mathfrak{a}\,[\sigma\alpha]\,.\,p + \mathfrak{b}\,[\sigma\beta]\,.\,p + \cdots = (\mathfrak{a}\,[\sigma\alpha] + \mathfrak{b}\,[\sigma\beta] + \cdots)\,.\,p = 0,$$

da der erste Faktor nach dem vorigen Paragraphen null ist. Für jeden andern Punkt ϱ hat man das Moment gleich

$$(\mathfrak{a}\,[\varrho\alpha] + \mathfrak{b}\,[\varrho\beta] + \cdots)\,.\,p,$$

und da der erste Faktor gleich $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \cdots)\,[\varrho\sigma]$ ist, gleich

$$[\varrho\sigma]\,.\,(\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \cdots)\,.\,p,$$

das heisst gleich dem Moment der an σ angebrachten Gesammtkraft.

Es ist bekannt genug, dass von der ersteren Eigenschaft die Mitte, wenn die Gewichte als physische Gewichte aufgefasst werden, der Schwerpunkt heisst. Da die physischen Gewichte immer als positiv

*) Sollten die Resultate dieses Paragraphen in rein geometrische Form gekleidet werden, so müsste man statt der Gewichte parallele Strecken nehmen, deren Grössen das Verhältniss der Gewichte darstellten.

erscheinen, so hat der zweite Fall hier keine direkte Anwendung. Denkt man sich aber einen in eine Flüssigkeit getauchten Körper, welcher von dieser Flüssigkeit rings umgeben ist, und rechnet man die Kraft, mit welcher jedes Theilchen durch sein physisches Gewicht nach unten, und die, mit welcher es durch den Druck der Flüssigkeit (welcher dem physischen Gewichte der verdrängten Flüssigkeit gleich ist) nach oben getrieben wird, zusammen, und betrachtet die Gesammtkraft als mathematisches Gewicht des betreffenden Theilchens, so hat man ebenso wohl positive als negative Gewichte. Wenn ins Besondere der Körper in der Flüssigkeit schwebt, so ist die Summe jener Gewichte null, und statt des mit einem Gewicht behafteten Schwerpunktes tritt nun eine bestimmte Strecke als Summe des Punktvereins auf, welchen der in der Flüssigkeit schwebende Körper darstellt. Diese
144 Strecke kann | ins Besondere null werden; dann schwebt der Körper in jeder Lage im Gleichgewicht; hingegen in jedem andern Falle bestimmt die Richtung der Strecke die Axe, welche die senkrechte Lage
144 annehmen muss, wenn der in der Flüssigkeit schwebende Körper | im Gleichgewichte sein soll.

Wie die Richtung und Länge dieser Strecke, welche für die Statik, wie wir im nächsten Paragraphen zeigen werden, eine bestimmte und einfache Bedeutung hat, gefunden werden könne, ergiebt sich sogleich aus dem folgenden Satze, welcher eine unmittelbare Folgerung aus dem Begriffe der Summe mehrerer Elementargrössen ist, nämlich aus dem Satze:

Wenn ein Körper aus mehreren einzelnen Körpern zusammengefügt ist, so findet man aus den Schwerpunkten und den Gewichten der einzelnen Körper den Schwerpunkt und das Gewicht des Ganzen, oder die Strecke, welche beides vertritt, indem man die Summe aus den mit den betreffenden Gewichten behafteten Schwerpunkten nimmt.

In unserm Falle ist der Schwerpunkt des Körpers an sich und der des verdrängten Wassers zu nehmen, und beide mit den betreffenden Gewichten, welche entgegengesetzt bezeichnet sind, zu multipliciren; und da für den Fall, dass der Körper schwebt in der Flüssigkeit, die Gewichte gleich sind, so erhält man als Summe dies Gewicht, multiplicirt mit der gegenseitigen Abweichung beider Schwerpunkte; die Axe geht also durch beide Schwerpunkte und ist null, wenn dieselben zusammenfallen.

§ 104. **Magnetismus, magnetische Axe.**

Eine ungleich wichtigere Anwendung des letzten Falles, in welchem statt des Summenpunktes eine Axe erscheint, ist die auf den Magnetismus.

Gauss hat gezeigt*), dass die magnetischen Intensitäten innerhalb eines magnetischen Körpers allemal zur Summe Null geben. Denkt man sich diese Intensitäten den zugehörigen Punkten (oder Theilchen) als mathematische Gewichte beigelegt, so wird die Summe des so gebildeten Punktvereins eine Strecke von bestimmter Richtung und Länge sein. Um die Bedeutung dieser Strecke für die Theorie des Magnetismus kennen zu lernen, denken wir uns eine magnetische Kraft, welche, wie etwa der Erdmagnetismus, oder die Kraft eines entfernten Magneten, die | einzelnen Punkte in parallelen Richtungen, den magne- *145*
tischen Intensitäten proportional forttreibt, so ist das Moment dieser Kräfte in Bezug auf irgend einen Punkt ϱ gleich

$$\mathfrak{a}\,[\varrho\alpha]\,.\,p + \mathfrak{b}\,[\varrho\beta]\,.\,p + \cdots,$$

wenn $\mathfrak{a}p, \mathfrak{b}p, \ldots$ die den magnetischen Intensitäten $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots$ proportio- 145
nalen auf die Punkte $\alpha, \beta, \ldots$ wirkenden Kräfte sind; es verwandelt sich aber jener Ausdruck, wenn man den gemeinschaftlichen Faktor p ausserhalb einer Klammer setzt, und bedenkt, dass dann die von der Klammer eingeschlossene Grösse jener konstanten Strecke, welche die Summe des Punktvereins darstellt und von uns mit a bezeichnet werden soll, gleich ist, in

$$a\,.\,p,$$

das heisst, das Moment jener Kräfte ist in Bezug auf je zwei Punkte gleich gross, nämlich, wenn wir a die magnetische Axe, und p die einwirkende magnetische Kraft (wie sie auf einen Punkt von der zur Einheit genommenen Intensität wirkt) nennen, gleich dem äusseren Produkt der magnetischen Axe in die einwirkende magnetische Kraft. Gleichgewicht ist also vorhanden, wenn dies Produkt null ist, das heisst, die magnetische Axe in der Richtung der einwirkenden Kraft liegt.

Der Begriff der magnetischen Axe, wie ich ihn hier dargestellt habe, ist von dem sonst gangbaren nur dadurch verschieden, dass sie hier als eine Strecke von bestimmter Richtung und Länge aufgefasst ist, während man sonst an ihr nur die Richtung festzuhalten pflegt. Die Gründe, warum ich diesen Begriff modificirt habe, ohne die Benennung zu ändern, ergeben sich leicht, da einerseits die Wissenschaft die Verknüpfung der Richtung und Länge jener Strecke zu einem Begriffe fordert, und andrerseits aus dem, was man über die magnetische Axe aussagt, jedesmal sogleich hervorgeht, ob die Länge in den Begriff mit aufgenommen ist, oder nicht, so dass also keine Verwechselung möglich ist. Dass man bisher in der Theorie des Magnetismus beides

*) In seiner Abhandlung *„Intensitas vis magneticae“*. [Werke, Bd. V, S. 79 ff.]

stets gesondert betrachtet hat, liegt nur darin, dass die Einheit von Richtung und Länge, wie wir sie in dem Begriffe der Strecke aufgefasst haben, bisher in der Geometrie keine Stelle fand. Uebrigens beweist schon die ausserordentliche Einfachheit, in welcher vermöge dieses Begriffes und der durch unsere Wissenschaft gebotenen Verknüpfung
146 das magnetische Moment sich darstellt, die Unentbehrlichkeit unserer Analyse für die Theorie des Magnetismus hinlänglich.

Anmerkung. Wir sind hier zu dem ersten und einzigen Punkte gelangt, in welchem unsere Wissenschaft an schon anderweitig Bekanntes heranstreift. Nämlich in dem barycentrischen Kalkül von Möbius wird gleichfalls eine Addition einfacher und vielfacher Punkte
146 dargelegt, zwar zunächst nur als eine kürzere Schreibart, aber doch mit derselben Rechnungsmethode, wie wir sie in den ersten Paragraphen dieses Kapitels, wenn gleich in grösserer Allgemeinheit, dargelegt haben. Was jedoch dort gänzlich fehlt, ist die Auffassung der Summe als Einer Grösse für den Fall, dass die Gewichte zusammen Null betragen.

Was den scharfsinnigen Verfasser jenes Werkes daran hinderte, diese Summe als Strecke von konstanter Länge und Richtung aufzufassen, ist ohne Zweifel die Ungewohntheit, Länge und Richtung in Einem Begriffe zusammenzufassen. Wäre jene Summe dort als Strecke fixirt, so wäre daraus der Begriff der Addition und Subtraktion der Strecken, wie wir ihn in Kapitel 1 des ersten Abschnittes dargestellt haben, für die Geometrie hervorgegangen, und unsere Wissenschaft hätte einen zweiten Berührungspunkt mit jenem Werke gefunden; auch würde dann der barycentrische Kalkül selbst eine viel freiere und allgemeinere Behandlung gewonnen haben*).

§ 105. **Anwendung auf die Differenzialrechnung.**

Es erscheint mir hier der geeignetste Ort, um die Anwendung unserer Wissenschaft auf die Differenzialrechnung wenigstens anzudeuten.

---

*) Als ich diese Anmerkung schrieb, war mir die Mechanik von Möbius (Leipzig 1843), in welcher er die Addition der Strecken lehrte, noch nicht zu Gesicht gekommen. Die Abhandlung in Crelle's Journal (Band 28), in welcher Möbius den barycentrischen Kalkül in der hier angedeuteten Weise begründete, erschien erst nach dem Druck der Ausdehnungslehre, obwohl das Datum der Unterschrift nachweist, dass dieselbe schon früher geschrieben war. Es gehört dies zu den merkwürdigen Berührungen wissenschaftlicher Arbeiten, wie sie so oft zum Erstaunen derer, welche so zusammentreffen, stattfinden. (1877.) [Gemeint sind die Elemente der Mechanik des Himmels, s. Möbius ges. Werke Bd. 4, S. 1—318. Die erwähnte Abhandlung steht im Crelleschen Journale, Bd. 28 auf S. 1—9 und in den ges. Werken Bd. 1, S. 601—612.]

Um zu einer solchen Anwendung zu gelangen, müssen wir die durch unsere Wissenschaft gewonnenen Grössen als Funktionen darstellen. Dies geschieht am einfachsten, wenn die unabhängige Veränderliche als Zahlengrösse gesetzt wird, etwa gleich t. Dann wird sich jede Grösse P in der Form

$$P = A + Bt^1 + Ct^2 + \cdots,$$

oder noch allgemeiner in der Form

$$P = A_m t^m + A_n t^n + \cdots$$

darstellen lassen, wo $A, B, C, \ldots$ oder $A_m, A_n, \ldots$ nothwendig Grössen von derselben Stufe sind wie P, und als unabhängig von t gedacht werden müssen. Setzen wir dann diesen Ausdruck als Funktion von t gleich $f(t)$, also

$$P = f(t),$$

und setzen wir ferner 147

$$dP = f(t + dt) - f(t),$$

so erhalten wir im allgemeinen Falle

$$\frac{dP}{dt} = mA_m t^{m-1} + nA_n t^{n-1} + \cdots.$$

Als der einfachste Fall erscheint hier der, dass P, also auch $A_m, A_n, \ldots$ Elementargrössen erster Stufe sind. Nimmt man dann ins Besondere an, dass P ein konstantes Gewicht habe, so wird es sich, wenn man die Grössen jetzt als Grössen erster Stufe mit kleinen Buchstaben bezeichnet, in der Form darstellen lassen

$$p = a + b_m t^m + b_n t^n + \cdots,$$

wo $b_m, b_n, \ldots$ Strecken darstellen, a und p also Elementargrössen von gleichem Gewichte. Dann erhält man

$$\frac{dp}{dt} = mb_m t^{m-1} + nb_n t^{n-1} + \cdots,$$

und $\frac{dp}{dt}$ stellt also eine Strecke dar.

Man übersieht leicht, dass, wenn p den Ort eines Punktes in der Zeit t darstellt, dann

$$\frac{dp}{dt}$$

die Geschwindigkeit desselben ihrer Grösse und Richtung nach, und

$$\frac{d^2p}{dt^2}$$

seine Beschleunigung auf dieselbe Weise darstellt. Durch die Einführung dieser Betrachtungsweise in die Mechanik gelangt man mit

Anwendung unserer Analyse auf's Leichteste zu der Lösung mancher Probleme, die sonst als verwickelt erscheinen; doch würde mich die weitere Verfolgung dieses Gegenstandes zu weit von meinem Ziele abführen*).

Zweites Kapitel.

Aeussere Multiplikation, Division und Abschattung der Elementargrössen.

A. Theoretische Entwickelung.

§ 106. In wiefern die Strecke als Produkt aufgefasst werden kann.

Der Begriff der Abweichung, wie wir ihn der Entwickelung des vorigen Kapitels zu Grunde legten, enthält dem Keime nach den Begriff des Produktes zweier Elementargrössen in sich.

148 Wir verstanden dort unter der Abweichung eines Elementes α von einem andern Elemente ϱ die Strecke, welche von ϱ nach α geführt werden kann, und bezeichneten dieselbe mit $[\varrho\alpha]$; ebenso verstanden wir unter der Abweichung eines Elementarvereines von einem Elemente ϱ die Vielfachensumme aus den Abweichungen seiner Elemente von demselben Elemente ϱ, wenn man als Koefficienten dieser Vielfachensumme die den betreffenden Elementen zugehörigen Zahlengrössen (Gewichte) nimmt. Wir bestimmten darauf die einem Elementarverein entsprechende Elementargrösse so, dass sie statt desselben gesetzt werden konnte, sobald es sich nur um die Abweichung handelte, und setzten eben die Gleichheit der Abweichungen als einzige Bedingung für die Gleichheit der Elementargrössen; daraus ergab sich dann, dass die einem Elementarvereine zugehörige Elementargrösse wiederum die mit den zugehörigen Gewichten als Koefficienten versehene Vielfachensumme der Elemente sei, also die entsprechende Vielfachensumme der Elemente, wie die Gesammtabweichung jenes Vereins eine Vielfachensumme aus den Abweichungen der Elemente war.

Bezeichnen wir daher gleichfalls die Abweichung einer Elementargrösse a von einem Elemente ϱ mit $[\varrho a]$, so haben wir

$$[\varrho\,(\mathfrak{a}\alpha + \mathfrak{b}\beta + \cdots)] = \mathfrak{a}\,[\varrho\alpha] + \mathfrak{b}\,[\varrho\beta] + \cdots;$$

und so auch, da die Gesammtabweichung eines Elementarvereins die Summe ist aus den Abweichungen seiner Theile

---

*) Vgl. meinen Aufsatz: Die Mechanik nach den Principien der Ausdehnungslehre, in den mathematischen Annalen Bd. XII, [S. 222—240]. (1877.)

$$[\varrho\,(a+b+c+\cdots)] = [\varrho a] + [\varrho b] + \cdots,$$

wenn $a, b, \ldots$ beliebige Elementargrössen vorstellen. Späterhin hatten wir das Produkt einer Zahlengrösse in eine Elementargrösse, das heisst in eine Vielfachensumme von Elementen, als eine Vielfachensumme definirt, welche aus der ersteren durch Multiplikation ihrer Koefficienten mit jener Zahlengrösse hervorgeht, und daraus folgt nun, dass man die Abweichung einer m-fachen Elementargrösse findet, wenn man die der einfachen mit m multiplicirt, also dass

$$[\varrho\,(m a)] = m\,[\varrho a]$$

ist*). Kurz es zeigt sich, dass die multiplikative Grundbeziehung | für 149
die fragliche Verknüpfung von ϱ mit einer Elementargrösse, sowohl an sich, als auch in Bezug auf das Hinzutreten von Zahlenfaktoren gilt, sobald man nur den zweiten Faktor als gegliedert betrachtet. 149
Ueberdies zeigt sich, da $[\varrho\varrho]$ null ist, und $[\varrho\alpha]$ gleich $-[\alpha\varrho]$, dass diese Multiplikation eine äussere sein würde.

§ 107. **Elementarsysteme.**

Ehe wir nun zu dem vollständigen Begriffe des äusseren Produktes der Elementargrössen übergehen, wollen wir den Begriff der Elementarsysteme feststellen.

Dieser Begriff gründet sich wie der der Ausdehnungssysteme (§ 16) auf den Begriff der Abhängigkeit. Wir nennen eine Elementargrösse erster Stufe *abhängig* von andern Elementargrössen, wenn sie sich als Vielfachensumme derselben darstellen lässt, hingegen nennen wir mehrere Elementargrössen erster Stufe *unabhängig*, wenn zwischen ihnen keine Abhängigkeit in dem angegebenen Sinne stattfindet, das heisst, keine von ihnen sich als Vielfachensumme der übrigen darstellen lässt. Nun verstehen wir unter einem *Elementarsysteme n-ter Stufe* die Gesammtheit der Elemente, welche von n Elementen abhängig sind, während diese n Elemente von einander unabhängig sind.

Sind nun $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ die n von einander unabhängigen Elemente, und ich betrachte zwei von ihnen abhängige Elemente ϱ und σ, so wird auch ihre Differenz sich als Vielfachensumme jener n Elemente darstellen lassen; diese Differenz, welche die gegenseitige Abweichung beider Elemente darstellt, hat zum Gewichte Null, und man erhält daher $\varrho - \sigma$ in der Form dargestellt:

---

*) Hieraus ergiebt sich übrigens, dass man in der ersten Gleichung dieses Paragraphen auch statt der Elemente $\alpha, \beta, \ldots$ die Elementargrössen $a, b, \ldots$ einführen könnte.

$$\varrho - \sigma = \mathfrak{a}\alpha + \mathfrak{b}\beta + \mathfrak{c}\gamma + \cdots,$$

wo zugleich

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \cdots = 0$$

ist. Drückt man vermittelst der letzten Gleichung irgend einen der Koefficienten, zum Beispiel $\mathfrak{a}$, durch die übrigen aus, so erhält man, indem man diesen Werth in die erste einführt,

$$\varrho - \sigma = \mathfrak{b}(\beta - \alpha) + \mathfrak{c}(\gamma - \alpha) + \cdots,$$

das heisst, die gegenseitige Abweichung zweier Elemente eines Elementar-Systems n-ter Stufe ist als Vielfachensumme von $(n-1)$ Strecken darstellbar, welche von einem der n Elemente, die das System bestimmen, nach den übrigen gelegt sind; und umgekehrt, jede Strecke,
150 die sich als Vielfachensumme dieser $(n-1)$ Strecken | darstellen lässt, führt auch von einem Elemente jenes Systems nothwendig wieder zu einem Elemente desselben Systems.

Wir können daher auch sagen, ein Elementarsystem n-ter Stufe
150 sei die Gesammtheit der Elemente, deren gegenseitige | Abweichungen einem und demselben Ausdehnungssystem $(n-1)$-ter Stufe angehören, oder, wenn man sich so ausdrücken will, es sei die elementare Darstellung eines Ausdehnungssystemes $(n-1)$-ter Stufe. Noch bemerke ich, dass es im Begriffe des Elementarsystems unmittelbar liegt, dass n Elemente dann und nur dann von einander unabhängig sind, wenn sie keinem niederen Elementarsystem als dem n-ter Stufe angehören.

§ 108. **Aeusseres Produkt der Elementargrössen, formell bestimmt.**

Um nun sogleich zu dem Begriff der äusseren Multiplikation beliebig vieler Elementargrössen erster Stufe zu gelangen, haben wir nur den allgemeinen (formellen) Begriff der äusseren Multiplikation auf diese Grössen anzuwenden.

Der Begriff der Multiplikation ist schon dadurch bestimmt, dass man in einem Produkte von zwei Faktoren, von denen der eine aus zwei gleichartigen Stücken besteht, statt dieses Faktors seine Stücke einzeln einführen, und die so gebildeten Produkte, welche wieder als gleichartig zu betrachten sind, addiren darf. Das Produkt mehrerer Grössen erster Stufe (die wir als solche einfache Faktoren genannt haben) wird als ein äusseres dadurch bestimmt, dass ohne Werthänderung desselben in jedem einfachen Faktor solche Stücke, welche mit einem der beiden zunächststehenden Faktoren gleichartig sind, weggelassen werden können. Durch diese Grundgesetze bestimmen wir also auch den Begriff der Multiplikation von Elementargrössen erster Stufe, und halten zugleich alle, in dem ersten Abschnitte für Ausdehnungsgrössen gegebenen Begriffsbestimmungen auch für Elementargrössen fest, und da auf jenen Grundgesetzen und den hinzutretenden Begriffsbestimmungen alle im ersten Abschnitte bewiesenen Gesetze beruhen, so gelten sie auch alle für Elementargrössen, also namentlich alle Gesetze der äusseren Multiplikation, der formellen Addition und Subtraktion, der Division und der Abschattung. In Bezug auf die letzte bemerken wir nur noch, dass der Name Projektion hier nicht gebraucht werden darf, weil er in Bezug auf Elementargrössen, wie sich später zeigen wird, einen gänzlich andern Begriff in sich schliesst, als wir bisher mit dem Namen | der Abschattung bezeichneten. *151*

Unsere Aufgabe bleibt daher ins Besondere, unserm Begriffe die möglichste Anschaulichkeit zu geben, und seine konkrete Darstellung vor Augen zu legen.

§ 109. **Realisation dieses Produktes; Ausweichung, starre Elementargrösse.**

Die Hauptsache ist hier, auszumitteln, wann zwei Produkte einander gleichgesetzt werden können, indem dadurch der Begriffsumfang der Grösse, welche das Produkt darstellt, bestimmt wird. Da nun | durch 151
jene formellen Grundgesetze der Begriff des Produktes vollkommen bestimmt sein soll, so haben wir zwei Produkte dann, aber auch n u r dann, einander gleich zu setzen, wenn sich vermittelst jener Grundgesetze (oder der daraus abgeleiteten) das eine Produkt in das andere verwandeln lässt.

Es sei daher ein Produkt aus n Elementargrössen erster Stufe der Betrachtung unterworfen. Zunächst ist klar, dass wenn die Gewichte dieser n Elementargrössen alle einzeln genommen null sind, also jede derselben als Ausdehnungsgrösse erster Stufe erscheint, auch ihr Produkt eine Ausdehnungsgrösse n-ter Stufe liefert. In jedem andern Falle, und wenn auch nur Ein einfacher Faktor ein geltendes Gewicht hat*), lässt sich jenes Produkt als Produkt eines Elementes in eine Ausdehnungsgrösse $(n-1)$-ter Stufe darstellen. Denn wir können zuerst den Faktor, von welchem wir voraussetzen, dass sein Gewicht nicht null sei, auf die erste Stelle bringen; sollte sich dabei das Vorzeichen des Produktes ändern, so können wir statt dessen das Zeichen irgend eines Faktors ändern. Ist nun $\mathfrak{a}\alpha$ jener Faktor, dessen Gewicht $\mathfrak{a}$ nicht null sein soll, so können wir nun den übrigen Faktoren, wenn ihr Gewicht noch nicht null ist, ein beliebiges Vielfaches von α als Stück hinzufügen, ohne den Werth des Produktes zu ändern, und

*) das heisst ein solches, welches nicht null ist.

dadurch das Gewicht jedes der übrigen Faktoren auf Null bringen. Nachdem dies geschehen ist, sind also die übrigen $(n-1)$ Faktoren Strecken geworden; ihr Produkt, welches eine Ausdehnungsgrösse $(n-1)$-ter Stufe ist, sei Q, so ist die Elementargrösse gleich

$$\mathfrak{a}\alpha \,.\, Q,$$

und dies wiederum, da $\mathfrak{a}$ eine Zahlengrösse ist, gleich

$$\alpha \,.\, \mathfrak{a}Q = \alpha \,.\, P,$$

152 wenn $\mathfrak{a}Q$ gleich P gesetzt wird. Es ist also die oben aufgestellte | Behauptung erwiesen; aber noch mehr: da das zu den einzelnen Faktoren hinzuzuaddirende Vielfache von α, wenn es das Gewicht derselben null machen soll, ein bestimmtes ist, so ergiebt sich dadurch ein bestimmter Werth von Q, also auch von P.

Um nun zu zeigen, dass P immer einen bestimmten Werth behält, welche Formveränderung man auch vorher mit jenem Produkte vorgenommen hat, haben wir nur festzuhalten, dass alle Formveränderungen eines Produktes, welche den Werth desselben ungeändert
152 lassen, darauf | beruhen, dass man jedem einfachen Faktor Stücke hinzufügen kann, welche den übrigen Faktoren gleichartig sind. Lassen wir nun in dem ursprünglichen Produkte zunächst den Faktor $\mathfrak{a}\alpha$ ungeändert, fügen aber irgend einem andern Faktor ein Stück hinzu, welches irgend einem der übrigen Faktoren, etwa dem Faktor $\mathfrak{b}\beta$ gleichartig ist, zum Beispiel das Stück $\mathfrak{m}\beta$, wo $\mathfrak{m}$ eine Zahlengrösse bedeutet, so hat man nachher, um das Gewicht dieses vermehrten Faktors auf Null zu bringen, noch ausser dem, was vorher zu subtrahiren war, die Grösse $\mathfrak{m}\alpha$ zu subtrahiren, somit erscheint das jenem Faktor hinzugefügte gleich $\mathfrak{m}(\beta-\alpha)$; aber der Faktor $\mathfrak{b}\beta$ verwandelt sich bei derselben Umwandlung in $\mathfrak{b}(\beta-\alpha)$; also bleibt auch nach der bezeichneten Umwandlung das dem einen Faktor hinzugefügte Stück dem andern gleichartig, das heisst das Produkt Q, also auch P behält denselben Werth.

Somit haben wir gezeigt, dass der Werth P, welcher als zweiter Faktor erscheint, ein bestimmter ist, wenn α unverändert bleibt; nun kann aber α um jede Strecke wachsen, welche dem Systeme P angehört; es sei dieselbe p_1, so hat man

$$(\alpha + p_1) \,.\, P = \alpha \,.\, P,$$

das heisst, es kann sich das Element α in jedes dem Elementarsysteme, was durch α und P bestimmt ist, angehörige Element verwandeln, während P immer denselben Werth behält, und hiermit ist der Begriffsumfang bestimmt.

Wir nennen nun ein Produkt von n Elementargrössen erster Stufe

oder eine Summe von solchen Produkten **eine Elementargrösse**
n-ter Stufe, und ein solches Produkt, dessen einfache Faktoren nicht
sämmtlich Strecken sind, eine **starre Elementargrösse**. Somit
haben wir den Satz gewonnen, „dass eine starre Elementargrösse n-ter
Stufe sich als Produkt eines Elementes in eine Ausdehnung $(n-1)$-ter
Stufe darstellen lässt, | dass diese Ausdehnung, welche wir die **Aus-** *153*
weichung jener Elementargrösse nennen, durch dieselbe vollkommen
bestimmt sei, dass aber als Element jedes beliebige angenommen werden
kann, was dem durch die einfachen Faktoren der Elementargrösse bestimmten Systeme angehört.“ Die starre Elementargrösse erscheint
daher überhaupt als Einheit des durch sie bedingten Elementarsystems
und der ihr zugehörigen Ausweichung; und durch das Ineinanderschauen
beider, das heisst, durch das Zusammenfassen beider Anschauungen in
eine ist die Begriffseinheit einer Elementargrösse von höherer Stufe,
oder, | was dasselbe ist, eines Produktes von Elementargrössen erster 153
Stufe gegeben.

Wir wollen nun die Anschauung der starren Elementargrösse dadurch vollenden, dass wir sie als bestimmten Theil des Elementarsystems, dem sie angehört, darzustellen suchen.

§ 110. **Das Eckgebilde.**

Nach dem im vorigen Paragraphen aufgestellten Begriff ist das Produkt zweier Elemente α, β die an das durch α und β bestimmte Elementarsystem gebundene und dadurch gleichsam erstarrte Strecke $\alpha\beta$.

Den Begriff der Strecke gründeten wir auf den des einfachen Ausdehnungsgebildes erster Stufe. Darunter verstanden wir die Gesammtheit der Elemente, in die ein erzeugendes Element bei stetiger Fortsetzung derselben Aenderung überging; das erzeugende Element in seinem ersten Zustande nannten wir das Anfangselement des Gebildes, in seinem letzten das Endelement, beide Elemente die Gränzelemente und alle übrigen Elemente des Gebildes bezeichneten wir als **zwischen** jenen Gränzelementen liegende. Somit können wir auch sagen, das einfache Gebilde $\alpha\beta$ sei die Gesammtheit der zwischen α und β liegenden Elemente, wobei es vermöge des Begriffs des Stetigen gleichgültig ist, ob wir die Gränzelemente selbst, weil sie an sich keine Ausdehnung darstellen, mit hinzunehmen oder nicht.

Dies Gebilde nun wird als Elementargrösse zweiter Stufe aufgefasst, wenn man nur einestheils das Elementarsystem zweiter Stufe, dem es angehört, und andrerseits die Erzeugungsweise festhält, so dass zwei solche Gebilde, welche demselben Elementarsysteme zweiter Stufe angehören und durch dieselben Aenderungen erzeugt sind, als Elementar-

grössen einander gleich sind, aber auch nur zwei solche. Oder denkt man das ganze Elementarsystem durch stetige Fortsetzung derselben
154 Aenderung | erzeugt, und nimmt zwei Elemente desselben als entsprechende an, und ausserdem je zwei Elemente als entsprechende, welche aus den entsprechenden durch dieselbe Aenderung erzeugt sind, so werden zwei auf diese Weise sich entsprechende Gebilde als gleiche Elementargrössen zweiter Stufe erscheinen.

Wenden wir nun dasselbe auf die Elementargrössen höherer Stufe an, und betrachten also drei oder mehrere Elemente $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, so entsteht uns hier gleichfalls die Aufgabe, die Gesammtheit der zwischen diesen Elementen liegenden Elemente zu finden, und diese Gesammt-
154 heit zu vergleichen mit dem Produkte der Elemente. Was wir | unter einem zwischen zwei Elementen liegenden Elemente verstehen, ist schon festgesetzt; jedes Element nun, was zwischen einem Elemente α und einem zwischen β und γ liegenden Elemente sich befindet, bezeichnen wir als ein zwischen α, β und γ liegendes, und überhaupt ein Element, welches zwischen α und einem zwischen einer Reihe von Elementen $\beta, \gamma, \ldots$ befindlichen Elemente liegt, als ein zwischen der ganzen Elementenreihe $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ liegendes. Die Gesammtheit dieser Elemente wollen wir vorläufig ein *Eckgebilde* nennen, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ seine Ecken, und diese Ecken sowohl als die Elemente, welche zwischen einem Theile dieser Ecken liegen (nicht zwischen allen), seine Gränzelemente, jene zwischen sämmtlichen Ecken liegenden Elemente hingegen die inneren Elemente des Eckgebildes.

Unsere Aufgabe ist nun zunächst die, alle Zwischenelemente (inneren Elemente) als Vielfachensummen jener Elemente, zwischen denen sie liegen, darzustellen, und die Relation zu bestimmen, welche dann zwischen den Koefficienten statt finden muss.

Zuerst in Bezug auf zwei Elemente ist klar, dass ein Element ϱ dann und nur dann zwischen α und β liege, wenn $\alpha\varrho$ gleichbezeichnet ist mit $\varrho\beta$, so dass die letzte Aenderung als Fortsetzung der ersten erscheint. Jedes Element ϱ nun, was in dem durch α, β bedingten Elementarsystem liegt, kann dargestellt werden durch die Gleichung

$$\varrho = \mathfrak{a}\alpha + \mathfrak{b}\beta,$$

wo $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ beliebige Zahlengrössen vorstellen, deren Summe Eins ist. Nach dem vorigen liegt nun ϱ dann und nur dann zwischen α und β, wenn $\alpha\varrho$ gleichbezeichnet ist mit $\varrho\beta$, das heisst,

$$\alpha\,.\,(\mathfrak{a}\alpha + \mathfrak{b}\beta) \text{ gleiches Zeichen hat mit } (\mathfrak{a}\alpha + \mathfrak{b}\beta)\,.\,\beta,$$

155 oder, indem man die Gesetze der äusseren Multiplikation anwendet, wenn $\mathfrak{b}\alpha\,.\,\beta$ gleich bezeichnet ist mit $\mathfrak{a}\alpha\,.\,\beta$, das heisst, $\mathfrak{b}$ gleich be-

zeichnet ist mit $\mathfrak{a}$; das heisst, da ihre Summe Eins, also positiv ist, wenn beide Koefficienten oder Gewichte positiv sind. Ist einer derselben null, so ist das Element ein Gränzelement.

Durch Fortsetzung desselben Verfahrens können wir nun beweisen, dass ein Element ϱ dann und nur dann zwischen einer Reihe von Elementen α, β, γ, ..., welche von einander unabhängig sind, liege, wenn es sich in der Form

$$\varrho = \mathfrak{a}\alpha + \mathfrak{b}\beta + \mathfrak{c}\gamma + \cdots$$

mit lauter positiven Koefficienten darstellen lasse.

Wir sagten, dass | ein Element ϱ dann und nur dann zwischen 155
einer Reihe von Elementen liege, wenn es zwischen dem ersten Elemente dieser Reihe und einem zwischen den folgenden befindlichen Elemente liege. Soll ϱ daher zwischen α, β, γ, ... liegen, so muss es zwischen α und einem zwischen β, γ, ... liegenden Elemente sich befinden, es muss also ϱ sich als Vielfachensumme von α und einem zwischen β, γ, ... liegenden Elemente, deren Koefficienten beide positiv sind, darstellen lassen; also muss zuerst der Koefficient von α positiv sein, demnächst aber auch der Koefficient des zwischen β, γ, ... liegenden Elementes. Dies Element muss sich aber aus demselben Grunde als Vielfachensumme von β und einem zwischen den folgenden Elementen γ, ... befindlichen Elemente mit positiven Koefficienten darstellen lassen; in dem Ausdrucke für ϱ war aber dies zwischen β, γ, ... liegende Element mit einem positiven Koefficienten multiplicirt; also werden wir, indem wir den für dies Element gefundenen Ausdruck in den Ausdruck für ϱ einführen, und die Klammer auflösen, ϱ als Vielfachensumme von den Elementen α, β und einem zwischen den folgenden Elementen γ, ... befindlichen Elemente mit positiven Koefficienten dargestellt haben, und da wir dies Verfahren bis zum letzten Elemente hin fortsetzen können, so folgt, dass jedes zwischen α, β, γ, ... liegende Element sich als Vielfachensumme von α, β, γ, ... mit positiven Koefficienten darstellen lasse.

Es ist nun noch zu zeigen, dass auch jedes Element, was sich in dieser Form darstellen lasse, Zwischenelement sei.

Ist ein Element ϱ in der obigen Form dargestellt

$$\varrho = \mathfrak{a}\alpha + \mathfrak{b}\beta + \mathfrak{c}\gamma + \cdots,$$

wo $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ... positive Koefficienten sind, so hat die Summe aller 156
auf $\mathfrak{a}\alpha$ folgenden Glieder zum Gewichte $\mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \cdots$, also eine positive Zahl, ist also, wenn man die Koefficienten $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ... mit $\mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \cdots$ dividirt, und dann jene Summe mit $\mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \cdots$ multiplicirt, als Produkt einer positiven Zahl in ein Element, was seinerseits wieder als

Vielfachensumme von β, γ, ... mit positiven Koefficienten erscheint, darstellbar; folglich liegt ϱ zwischen α und einem Elemente, was als Vielfachensumme der folgenden Elemente mit positiven Koefficienten darstellbar ist, und da wir diesen Schluss fortsetzen können bis zu den beiden letzten Elementen hin, und [da] das als Vielfachensumme dieser
156 letzten mit positiven Koefficienten | darstellbare Element ein zwischenliegendes ist, so folgt, dass ϱ selbst zwischen α, β, γ, ... liege. Also ist der vorher ausgesprochene Satz erwiesen; auch ist klar, dass, wenn einer oder mehrere Koefficienten null werden, während die übrigen positiv bleiben, ϱ als Gränzelement erscheint.

§ 111. Vergleichung des Eckgebildes mit dem Produkte. Ausdehnung der Elementargrösse.

Betrachte ich nun auf der andern Seite das Produkt $\alpha \,.\, \beta \,.\, \gamma \,.\, \delta \ldots$, dessen Ausweichung nach § 109 gleich $[\alpha\beta] \,.\, [\beta\gamma] \,.\, [\gamma\delta] \ldots$ ist, und stelle das Ausdehnungsgebilde dar, was diesen Werth hat, und dadurch entsteht, dass das Element α zuerst die Strecke $[\alpha\beta]$ beschreibt, dann jedes so erzeugte Element die Strecke $[\beta\gamma]$, dann jedes die Strecke $[\gamma\delta]$ beschreibt, und so weiter, so ist klar, dass jedes solche Element (σ) aus α durch eine Aenderung von der Form

$$p\,[\alpha\beta] + q\,[\beta\gamma] + r\,[\gamma\delta] + \cdots,$$

wo p, q, r, ... sämmtlich positiv und kleiner als Eins sind, hervorgeht, also der Gleichung

$$[\alpha\sigma] = p\,[\alpha\beta] + q\,[\beta\gamma] + r\,[\gamma\delta] + \cdots$$

genügt, und dass jenes Ausdehnungsgebilde ausserdem keine Elemente enthält, indem die Werthe Null und Eins für jene Koefficienten (p, q, r, ...) Gränzelemente bedingen.

Das Eckgebilde zwischen α, β, γ, δ, ... enthielt die Gesammtheit der Elemente, welche der Gleichung

$$\sigma = \mathfrak{a}\alpha + \mathfrak{b}\beta + \mathfrak{c}\gamma + \mathfrak{d}\delta + \cdots$$

mit positiven Werthen von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, ..., das heisst, welche der Gleichung

$$[\alpha\sigma] = \mathfrak{b}\,[\alpha\beta] + \mathfrak{c}\,[\alpha\gamma] + \mathfrak{d}\,[\alpha\delta] + \cdots$$

genügen, wenn $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, ... positiv, und ihre Summe kleiner als Eins
157 ist. Setzen wir hier statt $[\alpha\gamma]$ seinen Werth $[\alpha\beta] + [\beta\gamma]$, statt $[\alpha\delta]$ seinen Werth $[\alpha\beta] + [\beta\gamma] + [\gamma\delta]$, und so weiter, so erhält man für ein Element σ des Eckgebildes die Gleichung

$$[\alpha\sigma] =$$
$$= (\mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \mathfrak{d} + \cdots)[\alpha\beta] + (\mathfrak{c} + \mathfrak{d} + \cdots)[\beta\gamma] + (\mathfrak{d} + \cdots)[\gamma\delta] + \cdots$$
$$= p[\alpha\beta] + q[\beta\gamma] + r[\gamma\delta] + \cdots$$

mit der Bedingung, dass jeder frühere Koefficient grösser als der folgende, der erste kleiner als Eins, der letzte grösser als Null ist, also mit der Bedingung

$$1 > p > q > r > \cdots > 0.$$

Es umfasst also das Eckgebilde nur einen Theil der Elemente, welche jenes dem Produkte $\alpha . \beta . \gamma . \delta \ldots$ entsprechende Ausdehnungsgebilde enthält, nämlich diejenigen, in denen die zuletzt hinzugefügte Be- 157
dingung erfüllt ist.

Nun wollen wir jenes Eckgebilde vorläufig mit $[a, b, c, \ldots]$ bezeichnen, indem wir $[\alpha\beta]$ mit a, $[\beta\gamma]$ mit b, $[\gamma\delta]$ mit c bezeichnen, und so weiter, und verstehen also darunter die Gesammtheit der Elemente σ, welche der Gleichung

$$[\alpha\sigma] = pa + qb + rc + \cdots$$

mit der Bedingung

$$1 > p > q > r > \cdots > 0$$

genügen. Als Gränzelemente erscheinen diejenigen, bei deren Darstellung in jener Form theilweise Gleichheit jener Grössen $(1, p, q, r, \ldots, 0)$ eintritt. Nun leuchtet ein, wie jede andere Folge von $a, b, c, \ldots$ auch ein anderes Eckgebilde hervorruft, welches mit dem ersteren kein inneres Element gemeinschaftlich hat, und wie die Gesammtheit der Elemente, welche die zu allen möglichen Folgen von $a, b, c, \ldots$ gehörigen Eckgebilde enthalten, wenn man die Gränzelemente immer nur einmal setzt, das dem Produkte $a . b . c \ldots$ entsprechende Ausdehnungsgebilde selbst darstellt. In der That, jedes Element dieses Ausdehnungsgebildes wird, wenn die Koefficienten $p, q, r, \ldots$ verschieden sind, nur in Einem der Eckgebilde, aber auch gewiss in einem, vorkommen; und wenn diese Koefficienten theilweise gleich sind, so werden es Gränzelemente sein, die also nur einmal gesetzt werden sollten. Wir können daher, da auch die Eckgebilde kein Element enthalten, welches nicht in jenem Ausdehnungsgebilde enthalten wäre, das letztere als Summe | sämmtlicher Eckgebilde, welche bei allen möglichen Folgen 158
der Faktoren $a, b, c, \ldots$ eintreten, ansehen.

Nun können wir endlich zeigen, dass alle diese Eckgebilde, als Theile ihres Systems, einander gleich sind.

Die Gleichheit zweier Theile eines Elementarsystems besteht im allgemeinsten Sinne darin, dass beide von dem in einfachem Sinne erzeugten Systeme von Elementen gleiche Gebiete umfassen, nämlich so, dass wechselseitig jedem Elemente des einen Gebietes ein, aber auch nur Ein Element des andern entspricht.

Um dies bestimmter zu fassen, nehmen wir an, $a, b, c, \ldots$ seien entsprechende Aenderungen, das heisst solche, die aus den entsprechenden Grundänderungen auf dieselbe Weise hervorgegangen seien, und
158 durch sie werde das System von α aus erzeugt, und zwar so, | dass je zwei Elemente, welche in einer der Richtungen $a, b, c, \ldots$ an einander gränzen, durch die dieser Richtung zugehörige Grundänderung aus einander erzeugt seien. Dann ist klar, wie jedem Elemente des Eckgebildes $[a, b, c, \ldots]$ ein, aber auch nur Ein Element eines Eckgebildes, in welchem die Strecken $a, b, c, \ldots$ in anderer Ordnung vorkommen, entspricht. Denn, wenn σ ein Element des ersten ist und $[\alpha\sigma]$ als Vielfachensumme von $a, b, c, \ldots$ dargestellt ist, so hat man sogleich das entsprechende Element des andern, wenn man in jener Vielfachensumme, ohne die Ordnung der Koefficienten zu ändern, $a, b, c, \ldots$ auf die Ordnung des zweiten Eckgebildes bringt. Folglich sind in der That, wenigstens in Bezug auf die angenommene Erzeugungsweise des Systems, alle jene Eckgebilde als Elementargrössen einander gleich. Aber schon aus der Art, wie wir in § 20 die Systeme von den Grundänderungen unabhängig gemacht haben, geht hervor, dass dasselbe auch gelten wird in Bezug auf jede andere einfache Erzeugungsweise des Systems; also sind jene Eckgebilde an sich gleich.

Da sie nun insgesammt dem Produkte gleich waren, so werden wir sagen können, jedes derselben sei gleich dem Produkte dividirt durch eine Zahl, welche die Anzahl der verschiedenen Folgen ausdrückt, welche die n Faktoren $a, b, c, \ldots$ annehmen können; diese Zahl nennen wir die *Gefolgszahl* aus n Elementen, und bezeichnen sie, wenn die Anzahl der Faktoren n ist, mit $n!$, setzen also das Eckgebilde seiner Ausdehnung nach gleich

159 $$\frac{a \,.\, b \,.\, c \ldots}{n!}\text{*)};$$

wir nennen diesen Werth die Ausdehnung des Produktes $\alpha \,.\, \beta \,.\, \gamma \ldots$, das heisst die Ausdehnung der Elementargrösse. Es ist also

die Ausdehnung einer starren Elementargrösse gleich ihrer Ausweichung, dividirt durch die zu der Stufenzahl dieser Ausweichung gehörige Gefolgszahl.

Namentlich ist, indem wir voraussetzen, dass zwei Elemente zwei

---

*) Dass $n! = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n$ sei, lehrt die Kombinationslehre; würden wir dies voraussetzen, so würden wir den Werth des Eckgebildes erhalten $\frac{a \,.\, b \,.\, c \ldots}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots}$.

Folgen zulassen, drei Elemente aber deren sechs, die Ausdehnung einer starren Elementargrösse dritter Stufe die Hälfte ihrer Auswei- 159
chung, und die Ausdehnung einer starren Elementargrösse vierter Stufe der sechste Theil ihrer Ausweichung*); und nehmen wir an, dass Ein Element nur Eine Anordnung zulasse, nämlich die, dass es eben gesetzt wird, und wenn kein Element da ist, auch Eine Anordnung möglich ist, nämlich die, dass eben kein Element gesetzt wird, so folgt, dass für Elementargrössen erster und zweiter Stufe Ausdehnung und Ausweichung einander gleich sind.

§ 112. **Gleiche Elementargrössen haben gleiche Ausweichungen.**

Für die Elementargrössen erster Stufe ist die Ausweichung oder Ausdehnung eine Zahlengrösse, nämlich dieselbe, die wir oben als ihr Gewicht bezeichneten. Es entsteht daher die Aufgabe, für Elementargrössen höherer Stufen die entsprechenden Sätze abzuleiten, die wir für Elementargrössen erster Stufe in Bezug auf ihr Gewicht aufstellten.

Zunächst ergiebt sich, „dass, wenn die Glieder einer Gleichung dasselbe Element α als gemeinschaftlichen Faktor enthalten, während der andere Faktor eines jeden Gliedes eine Ausdehnung ist, man jenes Element α aus allen Gliedern weglassen könne, ohne die Richtigkeit der Gleichung aufzuheben.“ Die Richtigkeit dieses Satzes erhellt, wenn man in der vorausgesetzten Gleichung Ein Glied auf die linke Seite allein schafft, | und die übrigen in Ein Glied mit dem Faktor α zu- *160*
sammenfasst, und also die Gleichung in der Form darstellt

$$\alpha \,.\, A = \alpha \,.\, (B + C + \cdots);$$

da nämlich nun die linke Seite eine starre Elementargrösse darstellt, die rechte also gleichfalls, so müssen die Ausweichungen auf beiden Seiten gleich, also

$$A = B + C + \cdots$$

sein. Stellt man dann die Glieder dieser Gleichung wieder in der ursprünglichen Ordnung her, so hat man die Gleichung, deren Richtigkeit zu erweisen war.

Wir können die Summe der Ausweichungen mehrerer Glieder, welche alle dasselbe Element ϱ als Faktor haben, auch dann, wenn diese Summe eine *formelle* Ausdehnungsgrösse darstellt, die Ausweichung

---

*) Diese Resultate entsprechen den Sätzen der Geometrie, dass das Dreieck die Hälfte ist des Parallelogramms von gleicher Grundseite und Höhe, und die dreiseitige Pyramide der sechste Theil des Spathes, dessen Kanten drei zusammenstossenden Kanten der Pyramide gleich sind.

160 ihrer Summe nennen, | und dann den soeben erwiesenen Satz auch so ausdrücken: „In einer Gleichung, deren Glieder dasselbe Element ϱ als gemeinschaftlichen Faktor haben, kann man statt aller Glieder gleichzeitig ihre Ausweichungen setzen, ohne die Richtigkeit der Gleichung aufzuheben.“ Vermittelst dieses Satzes ergiebt sich nun, dass, wenn man die Glieder irgend einer Gleichung alle mit demselben Elemente ϱ multiplicirt, und statt jedes so gewonnenen Gliedes seine Ausweichung setzt, die Gleichung eine richtige bleibt.

Wir verstehen nun dem vorigen Kapitel gemäss *unter der Abweichung einer Grösse B von einer andern A die Ausweichung des Produktes $A.B$*, und haben somit den Satz gewonnen, dass man in einer Gleichung statt aller Glieder gleichzeitig ihre Abweichungen von demselben Elemente ϱ setzen darf, oder einfacher ausgedrückt, dass gleiche Elementargrössen auch von demselben Elemente um Gleiches abweichen. Hierbei ist zu bemerken, wie aus der Definition sogleich hervorgeht, dass die Abweichung einer Ausdehnung von einem Elemente stets dieser selbst gleich, also von dem Elemente gänzlich unabhängig ist.

Stellen wir uns nun eine Gleichung vor, deren Glieder theils starre Elementargrössen theils Ausdehnungen sind, und in welcher jede der ersteren als Produkt eines Elementes in eine Ausdehnung, also in der Form $\alpha . A$ dargestellt ist: so verwandelt sich durch Multiplikation aller Glieder mit ϱ jenes Glied in $\varrho . \alpha . A$ oder in $\varrho . (\alpha - \varrho) . A$, weil man in jedem Faktor eines äusseren Produktes Stücke hinzufügen
161 kann, | welche den andern Faktoren gleichartig sind, und da $(\alpha - \varrho)$ eine Strecke, also $(\alpha - \varrho) . A$ eine Ausdehnung ist, so kann man nun den gemeinschaftlichen Faktor ϱ weglassen, und erhält auf diese Weise die Abweichungsgleichung, welche somit aus der gegebenen dadurch hervorgeht, dass man von den Elementen der starren Elementargrössen überall ϱ subtrahirt, und die Glieder, welche Ausdehnungen darstellen, unverändert lässt. Subtrahirt man nun diese Gleichung von der gegebenen, so fallen die Ausdehnungsglieder weg, das Glied $\alpha . A$ verwandelt sich in $\alpha . A - (\alpha - \varrho) . A$, das heisst in $\varrho . A$; das heisst, statt der verschiedenen Elemente, welche mit den Ausweichungen multiplicirt waren, tritt überall das Element ϱ ein; dies kann man nun weglassen nach dem vorigen Paragraphen, und erhält somit eine Glei-
161 chung, welche aus der gegebenen dadurch hervorgeht, | dass man die Ausdehnungsglieder weglässt, statt der übrigen aber ihre Ausweichungen setzt. Da nun die Ausweichung einer Summe von Elementargrössen als die Summe ihrer Ausweichungen definirt ist, worin zugleich liegt, *dass die Ausweichung einer Ausdehnungsgrösse null ist*, so können wir einfacher sagen:

Gleiche Elementargrössen haben gleiche Ausweichungen,

oder

Eine Gleichung bleibt richtig, wenn man statt aller Glieder gleichzeitig ihre Ausweichungen setzt.

Aus diesem Satze geht, wenn man die Ableitungsweise, durch welche er sich ergab, umkehrt, der umgekehrte Satz hervor:

Zwei Elementargrössen, welche gleiche Ausweichungen haben, und von irgend einem Elemente ϱ um gleiche Grössen abweichen, sind einander gleich (und weichen auch von jedem andern Elemente um eine gleiche Grösse ab).

Nämlich sind

$$\alpha_1 . A_1 + \alpha_2 . A_2 + \cdots + P$$

und

$$\beta_1 . B_1 + \beta_2 . B_2 + \cdots + Q,$$

wo die griechischen Buchstaben Elemente, die lateinischen Ausdehnungsgrössen vorstellen, die beiden Elementargrössen, von denen wir voraussetzen, dass ihre Ausweichungen gleich sind, das heisst,

$$A_1 + A_2 + \cdots = B_1 + B_2 + \cdots$$

ist, und dass ihre Abweichungen von irgend einem Elemente ϱ gleich sind, das heisst

$$(\alpha_1 - \varrho) . A_1 + (\alpha_2 - \varrho) . A_2 + \cdots + P$$

gleich ist 162

$$(\beta_1 - \varrho) . B_1 + (\beta_2 - \varrho) . B_2 + \cdots + Q,$$

so erhält man aus dieser letzten Gleichung, indem man die Klammern auflöst, und bemerkt, dass nun die Glieder, welche ϱ enthalten, sich vermöge der ersten Gleichung aufheben, die zu erweisende Gleichung

$$\alpha_1 . A_1 + \alpha_2 . A_2 + \cdots + P$$

gleich

$$\beta_1 . B_1 + \beta_2 . B_2 + \cdots + Q.$$

Eine specielle Folgerung dieses Satzes ist die, *dass eine Elementargrösse, deren Ausweichung null ist, einer Ausdehnungsgrösse gleich ist, und von allen Elementen um gleich viel, nämlich um eben diese Ausdehnungsgrösse abweicht.* Denn wenn die Abweichung jener Elementargrösse von irgend einem Elemente ϱ, welche Abweichung | immer nach 162
der Definition eine Ausdehnungsgrösse darstellt, gleich P ist, so muss sie selbst gleich P sein, weil sie mit P gleiche Ausweichung nämlich Null hat, und beide von demselben Elemente ϱ um eine gleiche Grösse abweichen, denn die Abweichung jeder Ausdehnungsgrösse von einem beliebigen Elemente ist eben diese Ausdehnungsgrösse selbst; also erfolgt jene Gleichheit nach dem soeben erwiesenen Satze, und daraus fliesst dann der andere Theil des zu erweisenden Satzes unmittelbar.

§ 113. **Summe der Elementargrössen.**

Wir wenden den Satz des vorigen Paragraphen noch auf die Addition einer starren Elementargrösse $(\alpha . A)$ und einer Ausdehnung (P) an.

Ist A die Ausweichung der ersteren, so muss es auch, da die Ausweichung einer Ausdehnungsgrösse null ist, die der Summe sein; soll daher die Summe wiederum eine starre Elementargrösse sein, so muss sie sich in der Form $\beta . A$ darstellen lassen, und es wird dann $\beta . A$ in der That der Summe gleich sein, wenn beide gleiche Abweichungen von irgend einem Elemente, zum Beispiel von α, darbieten; die Abweichung der Grösse $\alpha . A$ von α ist aber null, also hat man als die einzige Bedingungsgleichung

$$P = (\beta - \alpha) . A,$$

das heisst,

die Summe einer starren Elementargrösse und einer Ausdehnungsgrösse ist nur dann wieder eine starre Elementargrösse, wenn die Aus-
163 *weichung der ersteren der letzteren | untergeordnet ist, und zwar ist die Summe dann diejenige Elementargrösse, welche mit der ersteren gleiche Ausweichung hat, und von einem Elemente der ersteren um die letztere abweicht.*

B. Anwendungen.

§ 114. **Die Elementargrössen im Raume, Liniengrössen, Plangrössen.**

Nachdem wir nun die Erzeugung der Elementargrössen höherer Stufen aus denen der ersten durch Multiplikation und Addition dargestellt, und ihren Begriff durch Vergleichung mit den Elementargrössen erster Stufe und mit den Ausdehnungsgrössen der Anschauung näher gerückt haben, gehen wir jetzt zu den Anwendungen auf die *Geometrie* und *Mechanik* über, in welchen jene Begriffe sich anschaulich abbilden.

Was zuerst die *Geometrie* betrifft, so ist klar, wie die gerade Linie und die Ebene als Elementarsysteme zweiter und dritter Stufe erscheinen. Der Raum selbst aber erscheint als Elementarsystem vierter Stufe, und erst hierdurch ist der Raum in seiner wahren Bedeutung dargestellt.

163 Die starre Elementargrösse | liess sich am einfachsten als Produkt eines Elementes in eine Ausdehnungsgrösse darstellen, welche wir die Ausweichung derselben nannten; und es erschien dieselbe als die an ihr Elementarsystem gebundene Ausweichung.

Betrachten wir zuerst das Produkt $(\alpha . p)$ eines Punktes (α) in eine Strecke (p), so ist p die Ausweichung dieses Produktes; die gerade Linie, welche von α in der Richtung der Strecke p gezogen wird, das Elementarsystem desselben, und das Produkt erscheint also als eine Strecke, welche einen Theil einer konstanten geraden Linie ausmacht, und an diese Linie gebunden bleibt. Wir nennen dies Produkt, da es einen Theil einer geraden Linie bildet, *Liniengrösse*, und fahren fort, die Strecke, welche an ihr erscheint, ihre Ausweichung zu nennen. Ebenso stellt sich das Produkt $(\alpha . P)$ eines Punktes (α) in einen Flächenraum (P) von konstanter Richtung als ein Flächenraum dar, welcher in einer konstanten Ebene liegt, nämlich in der durch jenen Punkt in der Richtung des Flächenraums gelegten Ebene; wir nennen jene Grösse, da sie einen Theil einer konstanten Ebene bildet, *Ebenengrösse* (vielleicht besser *Plangrösse*), und jenen Flächenraum von konstanter Richtung ihre Ausweichung. Das Produkt endlich eines Punktes in einen Körperraum hat für die Geometrie, da der Raum ein Elementarsystem vierter Stufe ist, also jeder Körperraum schon an sich an ihn gebunden ist, keine andere Bedeutung als dieser Körperraum selbst. *164*

§ 115. Produkte und Summen dieser Grössen.

Hieraus entwickelt sich nun leicht der Begriff eines Produktes von mehreren Punkten.

Betrachtet man zuerst das Produkt zweier Punkte $\alpha . \beta$ oder $\alpha\beta$, so ist das System, an welches es gebunden ist, die durch beide Punkte gezogene gerade Linie, und da

$$\alpha . \beta = \alpha . (\beta - \alpha)$$

ist, so ist die Ausweichung dieses Produktes die Abweichung des zweiten Punktes von dem ersten, das heisst, das Produkt zweier Punkte ist eine Liniengrösse, deren Linie durch jene beiden Punkte geht, und deren Ausweichung die von dem ersten an den zweiten geführte Strecke ist.

Das Produkt dreier Punkte $\alpha . \beta . \gamma$ erscheint als Plangrösse, deren Ebene durch jene drei Punkte geht; und da

$$\alpha . \beta . \gamma = \alpha . (\beta - \alpha) . (\gamma - \alpha) = \alpha . [\alpha\beta] . [\alpha\gamma]$$

ist, so ist die Ausweichung derselben der Flächenraum eines Parallelogramms, was die Abweichungen der beiden letzten Punkte von dem ersten zu Seiten hat. Auch können wir, da

$$[\alpha\gamma] = [\alpha\beta] + [\beta\gamma]$$ 164

ist,

$$[\alpha\beta] . [\alpha\gamma] = [\alpha\beta] . [\beta\gamma]$$

setzen; also ist die Ausweichung das Produkt der stetig auf einander folgenden Strecken, welche die Punkte in der Reihenfolge, in welcher sie in dem Produkte auftreten, verbinden.

Das Produkt von vier Punkten $\alpha . \beta . \gamma . \delta$ erscheint als ein Körperraum, und zwar ist die Ausweichung desselben, da

$$\alpha . \beta . \gamma . \delta = \alpha . (\beta - \alpha) . (\gamma - \alpha) . (\delta - \alpha) = \alpha . [\alpha\beta] . [\alpha\gamma] . [\alpha\delta]$$

ist, gleich dem Körperraum eines Spathes, welches die Abweichungen der drei letzten Punkte von dem ersten (in der gehörigen Reihenfolge genommen) zu Seiten hat; oder da

$$[\alpha\gamma] = [\alpha\beta] + [\beta\gamma]$$
$$[\alpha\delta] = [\alpha\beta] + [\beta\gamma] + [\gamma\delta]$$

ist, so ist auch, wenn man die den übrigen Faktoren gleichartigen Stücke weglässt,

$$[\alpha\beta] . [\alpha\gamma] . [\alpha\delta] = [\alpha\beta] . [\beta\gamma] . [\gamma\delta],$$

das heisst, die Ausweichung des Produktes von vier Punkten ist gleich dem Produkte der stetig auf einander folgenden Strecken, welche jene Punkte in der Reihenfolge, in welcher sie in jenem Produkte vor-
165 kommen, verbinden. | Hierbei braucht man nicht hinzuzufügen, dass diese Grösse als an den Raum gebunden zu betrachten ist, weil alle räumlichen Grössen an ihn gebunden sind.

Das Produkt von mehr als vier Punkten wird, da der Raum nur ein Elementarsystem vierter Stufe ist, stets null sein müssen. Sind die zu multiplicirenden Punkte noch mit Gewichten behaftet, so hat man nur das Produkt der einfachen Punkte noch mit dem Produkte der Gewichte zu multipliciren, wodurch sich nur die Ausweichung ändert.

Viel einfacher gestaltet sich alles, wenn wir die *Ausdehnung* betrachten. Nach der Definition der inneren oder zwischen liegenden Elemente, deren Gesammtheit die Ausdehnung darstellt, ist die Ausdehnung des Produktes $\alpha . \beta . \gamma$ gleich dem Flächenraum des Dreiecks, welches α, β, γ zu Ecken hat, und die des Produktes $\alpha . \beta . \gamma . \delta$ gleich dem Körperraum der Pyramide, welche α, β, γ, δ zu Ecken hat; und zugleich liegt in dem Satze, dass die Ausdehnung einer starren Elementargrösse gleich ihrer Ausweichung dividirt durch die zu der Stufenzahl dieser Ausweichung gehörige Gefolgszahl ist, dass das Dreieck die Hälfte des Parallelogramms, und die dreiseitige Pyramide der sechste
165 Theil des Spathes ist, | dessen Kanten mit dreien der Pyramide parallel sind.

Hierdurch ist also der Begriff eines Produktes von mehreren Elementargrössen erster Stufe für den Raum bestimmt; und wir sind dabei nur zu zwei neuen Grössen, nämlich der Liniengrösse und der

Plangrösse gelangt. Auch erhellt, wie das Produkt einer Liniengrösse in einen Punkt (oder eine Elementargrösse erster Stufe) allemal eine Plangrösse, das Produkt zweier Liniengrössen und das eines Punktes in eine Plangrösse allemal einen Körperraum liefert; dass diese Produkte aber null werden, wenn die Stufenzahlen der Faktoren zusammengenommen grösser sind, als die des Elementarsystemes, in welchem sie liegen, also zum Beispiel das Produkt zweier Liniengrössen null wird, wenn sie in derselben Ebene liegen. Also auch hierdurch gelangen wir zu keinen andern Grössen, als zu den beiden oben genannten.

Hingegen gelangen wir durch die Addition der Liniengrössen zu einer eigenthümlichen Summengrösse, welche besonders für die Statik von entschiedener Wichtigkeit ist. Wir zeigten oben (Kapitel 3 des ersten Abschnittes), dass die Summe zweier Produkte n-ter Stufe nur
dann wieder als ein Produkt n-ter Stufe erscheint, | wenn jene beiden 166
Produkte demselben Systeme $(n+1)$-ter Stufe angehören, hingegen eine formelle Summe, die wir Summengrösse nannten, liefert, wenn sie nur durch ein noch höheres System umfasst werden konnten. Der letztere Fall kann für den Raum, welcher als Elementarsystem vierter Stufe erscheint, nur eintreten, wenn Elementargrössen zweiter Stufe, das heisst Liniengrössen addirt werden sollen, und diese nicht in Einer Ebene liegen. Die nähere Erörterung dieses Falles behalte ich der Anwendung auf die Statik vor, in welcher diese Summengrösse eine selbstständige Bedeutung gewinnt.

§ 116, 117. **Richtsysteme für Elementargrössen.**

§ 116.

Unter den zahlreichen Anwendungen, welche die Methode unserer Analyse auf die *Geometrie* verstattet, hebe ich hier nur diejenigen hervor, welche mir am geeignetsten erscheinen, um das Wesen jener Methode in ein helleres Licht zu setzen.

Um die Beziehung zu der sonst üblichen *Koordinatenbestimmung* hervortreten zu lassen, will ich zuerst den Begriff der Richtsysteme auf die Auffassung des Raumes als eines Elementarsystemes übertragen. Wir hatten im fünften Kapitel des ersten Abschnittes den Begriff eines Richtsystemes für Ausdehnungsgrössen aufgestellt, und demnächst für Elementargrössen festgesetzt, dass alle Definitionen, welche wir für Ausdehnungsgrössen aufgestellt hatten, auch auf jene übertragen
werden sollen. Während dort als Grundmasse Ausdehnungsgrössen 166
erster Stufe auftraten, so werden hier Elementargrössen erster Stufe als Grundmasse auftreten, und dadurch ist dann die Bedeutung aller

dort in § 87 und 88 aufgestellten Begriffe auch für Elementargrössen bestimmt, namentlich sind die Definitionen von Richtmassen, Richtgebieten, Richtstücken, Zeigern hier genau dieselben wie dort; nur die Richtgebiete erster Stufe, welche wir dort Richtaxen nannten, werden wir hier Richtelemente nennen müssen. Dabei will ich dann nur noch bemerken, dass, da auch die Strecken als Elementargrössen erster Stufe aufgefasst werden können, unter den Grundmassen beliebig viele als Strecken auftreten können, und nur wenn alle Grundmasse Strecken werden, erhalten wir das Richtsystem für Ausdehnungsgrössen. Dasjenige Richtsystem, was diesem am nächsten steht, und dennoch zur Darstellung und Bestimmung der Elementargrössen hinreicht, ist das-
167 jenige, in welchem Ein Grundmass ein Element ist, alle | übrigen aber Strecken darstellen, ein Richtsystem, was seiner Einfachheit wegen besondere Auszeichnung verdient.

§ 117.

Wenden wir dies nun auf die Geometrie an, so erscheinen für den Raum als ein Elementarsystem vierter Stufe vier von einander unabhängige Elementargrössen erster Stufe als Grundmasse, welche zur Bestimmung hinreichen. Die Bedingung, dass sie von einander unabhängig sein sollen, sagt nur aus, dass sie nicht in Einer Ebene liegen dürfen, und wenigstens eins von ihnen eine starre Elementargrösse sein muss (während von den übrigen beliebige auch Strecken sein dürfen).

Nehmen wir vier starre Elementargrössen (das heisst vielfache Elemente) als Grundmasse an, so haben wir die von Möbius in seinem barycentrischen Kalkül zu Grunde gelegte Art der Koordinatenbestimmung, welche mit der von Plücker in seinem System der analytischen Geometrie dargestellten ihrem Wesen nach zusammenfällt. Als Richtgebiete zweiter Stufe erscheinen hier sechs gerade Linien, welche je zwei der Richtelemente verbinden, und als Kanten einer Pyramide erscheinen, welche jene Richtelemente zu Ecken hat; als Richtgebiete dritter Stufe vier Ebenen, welche durch je drei der Richtelemente gelegt sind und als Seitenflächen jener Pyramide erscheinen; und die Richtmasse zweiter und dritter Stufe stellen Theile jener Linien und Ebenen dar; das Richtmass vierter Stufe, welches hier das Hauptmass
167 ist, stellt einen Körperraum dar. Jede Elementargrösse | erster Stufe, mag sie nun eine starre Elementargrösse oder eine Strecke sein, kann im Raume als Vielfachensumme der vier Grundmasse dargestellt werden; jede Elementargrösse zweiter Stufe, mag sie nun eine Liniengrösse

oder ein Flächenraum von konstanter Richtung, oder eine Summengrösse sein, kann als Summe von sechs Liniengrössen dargestellt werden, welche den oben erwähnten sechs Linien angehören; kurz jede Grösse kann als Vielfachensumme der Richtmasse gleicher Stufe, oder als Summe von Stücken, welche den Richtgebieten gleicher Stufe angehören, dargestellt werden.

Diese Richtsysteme, deren Grundmasse starre Elementargrössen, das heisst vielfache Punkte sind, nennen wir mit Möbius *barycentrische*. Die einfachste Art der barycentrischen Richtsysteme ist die, bei welcher die Grundmasse blosse Punkte darstellen. Aber die barycentrischen Richtsysteme selbst erscheinen nur als eine besondere, | obwohl am *168*
weitesten reichende Art der allgemeinen Richtsysteme, welche aus vier beliebigen Elementargrössen erster Stufe bestehen. Denn wir zeigten, dass sich beliebig viele derselben bis auf eine in Strecken verwandeln können, und erhalten so ausser dem genannten noch solche Richtsysteme, in welchen die Richtgebiete erster Stufe theils Richtelemente, theils Richtaxen (konstante Richtungen) sind.

Unter diesen heben wir besonders diejenige Art der Richtsysteme hervor, welche ein Element und drei Strecken zu Grundmassen haben. Als Richtmasse zweiter Stufe treten hier auf einestheils drei Liniengrössen, deren Linien durch das Richtelement gehen, und deren Ausweichungen die drei andern Grundmasse sind; anderntheils drei Flächenräume von konstanter Richtung, welche durch die drei zwischen jenen drei Strecken möglichen Spathecke (Parallelogramme) dargestellt werden. Als Richtmasse dritter Stufe erscheinen einestheils drei Plangrössen, deren Ebenen durch das Richtelement gehen und deren Ausweichungen die Flächenräume jener drei Spathecke sind, anderntheils ein als Ausdehnungsgrösse aufgefasster Körperraum, welcher durch das aus jenen drei Strecken konstruirbare Spath dargestellt ist. Als Hauptmass endlich erscheint derselbe Körperraum aufgefasst als Elementargrösse vierter Stufe. Die Systeme, welchen diese Richtmasse angehören, bilden dann die zugehörigen Richtgebiete.

Die Richtstücke eines Punktes in Bezug auf ein solches Richtsystem sind nun einestheils das Richtelement, anderntheils drei | Strecken, 168
welche den drei Richtaxen parallel sind, und als Summe von solchen vier Richtstücken wird jeder Punkt im Raume dargestellt werden können; die Abweichung eines Punktes im Raume vom Richtelemente wird daher nach diesem Richtsysteme durch Richtstücke von konstanter Richtung (durch Parallelkoordinaten) bestimmt, also ganz auf dieselbe Weise, wie eine Ausdehnung überhaupt durch Richtsysteme, welche zur Bestimmung von Ausdehnungen dienen, bestimmt wird.

§ 118. Verwandlung der Koordinaten.

Indem wir nun alle diese Richtsysteme als besondere Arten eines allgemeinen Richtsystems, dessen vier Grundmasse Elementargrössen sind, darstellen: so haben wir damit einestheils die allgemeinste Ko-
169 ordinatenbestimmung gefunden, bei welcher die Ebene | noch als Punktgebilde erster Ordnung erscheint, andererseits sind wir dadurch in den Stand gesetzt, das Verfahren, durch welches wir von einer Koordinatenbestimmung zu einer andern derselben Art übergehen konnten, und welches wir in § 92 für Parallelkoordinaten darstellten, nicht nur auf jede Art der Richtsysteme anzuwenden, sondern auch es da eintreten zu lassen, wo aus einer Art der Koordinatenbestimmung zur andern übergegangen werden soll, sobald beide nur jener von uns dargestellten allgemeineren Gattung angehören. Namentlich können wir danach unmittelbar die barycentrischen Gleichungen in Gleichungen zwischen Parallelkoordinaten unwandeln und umgekehrt, ohne dass wir noch irgend einer besonderen Vorschrift bedürften. — Indem wir nun ferner den Begriff der Richtstücke (Koordinaten) in einem allgemeineren Sinne auffassten, sofern wir auch Richtstücke höherer Ordnung annahmen, so reicht dieselbe allgemeine Art der Richtsysteme auch aus, um Elementargrössen höherer Stufen, namentlich um Liniengrössen und Ebenengrössen zu bestimmen.

Ehe wir die Bedeutung dieser Bestimmungen durchgehen, haben wir auf einen Unterschied zwischen der von uns angegebenen Bestimmungsweise und der sonst üblichen aufmerksam zu machen und zu zeigen, wie dieser Unterschied ausgeglichen werden könne. Nämlich wir sind überall zu der Bestimmung von Elementargrössen, das heisst von Punkten mit zugehörigen Gewichten, von Liniengrössen und Ebenengrössen gelangt. Bei der Bestimmung durch Koordinaten kommt es aber nur auf die Bestimmung der Punkte, Linien und Ebenen ihrer Lage nach an, und dadurch erhalten wir bei unserer Betrachtungsweise
169 stets ein Richtstück oder einen Zeiger mehr, als es bei jener Bestimmung der Lage erforderlich ist. Dieser Unterschied lässt sich auf der Stelle ausgleichen, indem man bedenkt, dass, wenn alle Richtstücke oder Zeiger einer Grösse mit derselben Zahlengrösse multiplicirt oder dividirt werden, dadurch die Lage (das Elementarsystem) derselben nicht geändert wird. Man erhält also sogleich die Anzahl der Zeiger um Eins vermindert, wenn man die Richtstücke (oder die Zeiger) mit einem der Zeiger jedesmal dividirt, und dadurch einen der Zeiger jedesmal auf Eins bringt. Die so gewonnenen Zeiger genügen dann jedesmal zur Bestimmung der Lage.

Indem wir nun auf solche Weise zum Beispiel die Lage einer Ebene durch | ihre Zeiger bestimmen, und zwischen den als veränder- *170*
lich genommenen Zeigern eine Gleichung m-ten Grades aufstellen, so wird dadurch eine unendliche Menge von Ebenen bedingt, deren Zeiger jener Gleichung genügen; und von allen diesen Ebenen wird eine Oberfläche umhüllt werden, von welcher ich späterhin zeigen werde, dass sie dieselbe sei, welche man als Oberfläche m-ter Klasse bezeichnet hat. Ebenso führt die Bestimmung der geraden Linie durch ihre Zeiger zu eigenthümlichen, bisher nicht beachteten Gebilden, welche ich zuerst gelegentlich in einer Abhandlung im Crelle'schen Journal der Betrachtung unterworfen habe.*)**) Da die weitere Erörterung dieses Gegenstandes die Schranken dieses Werkes überschreiten würde, so will ich mich damit begnügen, hier noch die Gleichung für die gerade Linie und die Ebene, wie sie sich durch unsere Wissenschaft ergiebt, aufzustellen, und mit den sonst bekannten Gleichungen für dieselben in Beziehung zu setzen.

§ 119. Gleichung der Ebene.

Die allgemeinste Aufgabe, die man sich hier stellen kann, ist die, die Gleichung einer Ebene, welche durch drei beliebige gegebene Punkte geht, oder die Gleichung einer [geraden] Linie, welche durch zwei beliebige gegebene Punkte geht, aufzustellen.

Es seien die gegebenen Punkte im ersten Falle α, β, γ, im zweiten Falle α, β; der veränderliche Punkt, welcher als Punkt jener Ebene oder dieser | Linie durch eine Gleichung zwischen ihm und den ge- 170
gebenen Punkten bestimmt werden soll, sei σ, so hat man sogleich aus dem Begriffe eines Elementarsystems zweiter und dritter Stufe für den ersten Fall die Gleichung

$$\alpha \,.\, \beta \,.\, \gamma \,.\, \sigma = 0,$$

für den zweiten

$$\alpha \,.\, \beta \,.\, \sigma = 0,$$

und durch diese Formeln, welche den grössten Grad der Einfachheit besitzen, ist die Aufgabe im allgemeinsten Sinne gelöst. Will man dann aus Vorliebe für die gewöhnliche Koordinatenbehandlung oder aus einem andern Grunde die entsprechenden Koordinatengleichungen

---

*) Crelle, Journal für die reine und angewandte Mathematik Bd. XXIV. [S. 262—282 und 372—380.]

**) Diese Gebilde sind besonders seit Plücker's letztem Werke „Neue Geometrie des Raumes, 1868“ vielfach von den ausgezeichnetsten Mathematikern bearbeitet worden und bilden den Hauptgegenstand der heutigen Liniengeometrie. (1877.)

aufstellen, so kann man, wenn man nur die Mühe des Niederschreibens dieser langgestreckten Formeln nicht scheut, dieselben unmittelbar aus jener einfachen Gleichung ableiten.

171 Will man zum Beispiel die Gleichung in Parallelkoordinaten darstellen, so hat man sich nur des am Schlusse des § 117 erwähnten Richtsystems zu bedienen. Bei diesem Richtsysteme wird jeder Punkt als Summe des Richtelements ϱ und einer Strecke dargestellt. Es sei

$$\alpha = \varrho + p_1, \quad \beta = \varrho + p_2, \quad \gamma = \varrho + p_3, \quad \sigma = \varrho + p,$$

so hat man durch Substitution dieser Ausdrücke in die Gleichung der Ebene

$$(\varrho + p_1) \cdot (\varrho + p_2) \cdot (\varrho + p_3) \cdot (\varrho + p) = 0,$$

oder, indem man die Klammern auflöst, und die Produkte, welche null werden*), weglässt,

$$\varrho \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p + p_1 \cdot \varrho \cdot p_3 \cdot p + p_1 \cdot p_2 \cdot \varrho \cdot p + p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \varrho = 0,$$

oder, indem man mit gehöriger Beobachtung des Vorzeichens ϱ überall auf die erste Stelle bringt, und es dann nach § 112 weglässt,

$$(p_2 \cdot p_3 + p_3 \cdot p_1 + p_1 \cdot p_2) \cdot p = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 .$$

Um nun diese Gleichung in die Koordinaten-Gleichung zu verwandeln, hat man nach § 88 nur statt jeder Strecke die Summe ihrer Richtstücke zu setzen. Es sei

$$p = x + y + z$$
$$p_1 = x_1 + y_1 + z_1$$
$$. \quad . \quad . \quad .,$$

wo $x, y, z, \ldots$ die Richtstücke darstellen, so hat man nun

171
$$\begin{aligned}
&(x_2 + y_2 + z_2) \cdot (x_3 + y_3 + z_3) \cdot (x + y + z) + \\
&+ (x_3 + y_3 + z_3) \cdot (x_1 + y_1 + z_1) \cdot (x + y + z) + \\
&+ (x_1 + y_1 + z_1) \cdot (x_2 + y_2 + z_2) \cdot (x + y + z) = \\
&= (x_1 + y_1 + z_1) \cdot (x_2 + y_2 + z_2) \cdot (x_3 + y_3 + z_3).
\end{aligned}$$

Nun hat man nur die Klammern aufzulösen, indem man beachtet, dass die mit gleichen Buchstaben bezeichneten Richtstücke parallel sind, und somit aus jedem Gliede nur sechs geltende Produkte zu je drei Faktoren hervorgehen, und hat dann die Faktoren der so entstehenden vierundzwanzig Produkte mit Beobachtung der Zeichen so zu ordnen, dass die Buchstaben in jedem Produkte auf dieselbe Weise auf einander folgen, und erhält dann eine Gleichung, in welcher man statt der Richtstücke die Zeiger setzen und sie dadurch zu einer

---

*) Das sind nämlich alle die, welche ϱ öfter als einmal als Faktor enthalten, und das Produkt $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p$.

arithmetischen Gleichung machen kann, in welcher | wiederum die Ord- 172
nung der Faktoren gleichgültig ist. Die Gleichung, welche man auf diese Weise gewinnt, ist, wenn man unter $x, y, z, \ldots$ jetzt die Zeiger versteht, folgende:

$$\begin{aligned}(y_2z_3 - y_3z_2 + y_3z_1 - y_1z_3 + y_1z_2 - y_2z_1)\,x &+ \\ + (z_2x_3 - z_3x_2 + z_3x_1 - z_1x_3 + z_1x_2 - z_2x_1)\,y &+ \\ + (x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3 + x_1y_2 - x_2y_1)\,z &= \\ = x_1y_2z_3 - x_1y_3z_2 + x_3y_1z_2 - x_3y_2z_1 + x_2y_3z_1 - x_2y_1z_3&.\end{aligned}$$

Diese Gleichung, welche sich durch die gewöhnliche Analyse nicht auf eine einfachere Form reduciren lässt, sagt, so weitläuftig sie auch erscheint, dennoch nichts weiter aus, als jene ursprüngliche Gleichung

$$\alpha\,.\,\beta\,.\,\gamma\,.\,\sigma = 0\,,$$

und enthält die kürzeste Lösung des obigen Problems, welche auf dem Wege der Koordinaten möglich ist. Man sieht hier in einem recht schlagenden Beispiel den Vortheil unserer Methode, und die Formelverwickelungen, in die man hineingeräth, sobald man diese Methode aufgiebt.

§ 120. Das statische Moment als Abweichung.

Indem ich die Darstellung der geometrischen Abschattung und Projektion, wie auch der verschiedenen Verwandtschaftssysteme einem späteren Kapitel *), in welchem diese Begriffe in einem noch grösseren Umfange ans Licht treten werden, vorbehalte, so schreite ich nun zu den Anwendungen auf die *Statik*.

Der Begriff | des Momentes tritt zuerst hier in seiner ganzen Ein- 172
fachheit auf, wie auch der Begriff der Kraft erst hier seine Darstellung findet, indem wir die Kraft als Liniengrösse, also als Elementargrösse zweiter Stufe auffassen. Unter dem Moment einer Kraft $\alpha\beta$ in Bezug auf einen Punkt ϱ verstanden wir oben das Produkt

$$[\varrho\alpha]\,.\,[\alpha\beta] \text{ oder } (\alpha - \varrho)\,.\,(\beta - \alpha)\,;$$

multipliciren wir diesen Werth noch mit dem Elemente ϱ, so erscheint das Moment als Ausweichung der so entstehenden Elementargrösse $\varrho\,.\,(\alpha - \varrho)\,.\,(\beta - \alpha)$; diese ist aber nach dem bekannten Gesetz der äusseren Multiplikation gleich

$$\varrho\,.\,\alpha\,.\,\beta\,,$$

somit können wir das Moment in Bezug auf einen Punkt definiren als
Ausweichung eines Produkts, dessen erster Faktor der | Beziehungs- 173

---

*) Kap. 4 dieses Abschnittes.

punkt und dessen zweiter Faktor die Kraft ist, oder als Abweichung der Kraft von dem Beziehungspunkte. Da nun jede Gleichung zwischen den Elementargrössen auch zwischen ihren Ausweichungen besteht, so wird auch jede Gleichung, welche zwischen jenen Produkten stattfindet, zwischen ihren Momenten gleichfalls stattfinden, obwohl nicht umgekehrt.

Man könnte daher selbst zweifelhaft sein, ob man nicht lieber jenes Produkt des Beziehungspunktes in die Kraft als Moment definiren und, was wir bisher als Moment fixirten, nur als Ausweichung jener Grösse darstellen soll. — Doch behalten wir den festgestellten Begriff bei.

Unter dem Moment einer Kraft $\alpha\beta$ in Bezug auf eine Axe $\varrho\sigma$ verstanden wir oben (§ 41) das Produkt

$$[\varrho\sigma] . [\sigma\alpha] . [\alpha\beta]$$

oder

$$(\sigma - \varrho) . (\alpha - \sigma) . (\beta - \alpha).$$

Multipliciren wir dasselbe mit ϱ, so erhalten wir das Produkt

$$\varrho . \sigma . \alpha . \beta,$$

dessen Ausweichung eben jenes Moment ist. Also erscheint das Moment einer Kraft in Bezug auf eine Axe als Ausweichung eines Produktes, dessen erster Faktor die Axe und dessen zweiter Faktor die Kraft ist, oder, einfacher ausgedrückt, als Abweichung der Kraft von der Axe. Da übrigens eine Gleichung zwischen Elementargrössen vierter Stufe im Raume, als einem Elementarsystem vierter Stufe, keine andere
173 Bedeutung hat, als die Gleichung zwischen ihren | Ausweichungen, so kann man das Moment in Bezug auf eine Axe auch direkt als Produkt dieser Axe in die Kraft auffassen.*)

§ 121. **Neuer Weg für die Behandlung der Statik.**

Es bietet sich auf diesem Punkte der Entwickelung eine Methode dar, durch welche wir alle Gesetze für das Gleichgewicht fester Körper ohne Voraussetzung aller früher bewiesenen Sätze der Statik auf die einfachste Weise ableiten können.

---

*) Da der Name (statisches) Moment jetzt überflüssig erscheint, indem er durch den Namen der Abweichung vollkommen ersetzt wird, und sich dieser sogar noch leichter handhaben lässt, so wäre es gewiss zweckmässig, wenn man den Namen Moment nur in dem Sinne gebrauchte, in welchem ihn zum Beispiel La Grange in seiner *mécanique analytique* überall gebraucht, wo er von dem Moment ohne weitere Bestimmung redet, und wenn man das sogenannte statische Moment eben als Abweichung bezeichnete. Doch habe ich dies nicht ohne weiteres einführen wollen.

Wir bedürfen dazu nur einestheils des Grundsatzes, *dass drei Kräfte,* | *welche auf einen Punkt wirken, dann und nur dann im Gleich-* 174
gewicht sind, wenn ihre Summe null ist, oder, indem wir zwei Kräfte oder Kraftsysteme einander gleichwirkend nennen, wenn sie durch dieselben Kräfte aufgehoben werden können, *dass zwei Kräfte, die auf einen Punkt wirken, der auf denselben Punkt wirkenden Summe beider Kräfte gleichwirkend sind*, anderntheils, *dass zwei Kräfte, welche auf einen festen Körper wirken, dann und nur dann im Gleichgewichte sind, wenn sie in derselben geraden Linie wirken und einander entgegengesetzt gleich sind.* Hieraus folgt sogleich, wenn wir den soeben aufgestellten Begriff des Gleichwirkens festhalten, *dass zwei Kräfte, welche auf einen festen Körper wirken, dann und nur dann einander gleichwirkend sind, wenn sie in derselben Linie wirken und einander gleich sind* oder einfacher ausgedrückt, *wenn sie als Liniengrössen einander gleich sind.*

Betrachten wir daher die Kräfte, welche auf feste Körper wirken, als Liniengrössen, so zeigt sich sogleich, wie zwei Kräfte, deren Wirkungslinien sich schneiden, ihrer Summe gleichwirkend seien; denn ist α dieser Durchschnittspunkt, so werden sich beide Kräfte als Liniengrössen darstellen lassen, deren erster Faktor α ist; sind dann $\alpha . p$ und $\alpha . q$, wo p und q Strecken bedeuten, diese Kräfte, so sind sie nach der ersten Voraussetzung gleichwirkend mit $\alpha . (p + q)$ oder mit $\alpha . p + \alpha . q$, das heisst sie sind der Summe der | Kräfte gleich- 174
wirkend, auch wenn die Kräfte als Liniengrössen aufgefasst werden.

Sind die Kräfte parallel, zum Beispiel die eine gleich $\alpha . p$, die andere gleich $m\beta . p$, wo p wiederum eine Strecke bedeutet, so können wir die beiden gleichwirkende Kraft nach demselben Princip nicht unmittelbar finden; nehmen wir daher zwei sich einander aufhebende Kräfte zu Hülfe, nämlich $\alpha . m\beta$ und $m\beta . \alpha$*), so sind jene beiden Kräfte gleichwirkend den vier Kräften

$$\alpha . p, \quad \alpha . m\beta, \quad m\beta . \alpha, \quad m\beta . p,$$

von denen die beiden ersten, da sie auf denselben Punkt wirken, ihrer Summe gleichwirkend sein werden, und ebenso die beiden letzten, und wir erhalten somit die beiden Kräfte

$$\alpha . (p + m\beta), \quad m\beta . (\alpha + p)$$

als den gegebenen Kräften gleichwirkend. Diese beiden Produkte können wir, indem wir zu dem zweiten Faktor den ersten hinzuaddiren, 175
wodurch nach den Gesetzen der äusseren Multiplikation der Werth des Produktes nicht geändert wird, auf einen gemeinschaftlichen Faktor

*) Beide heben einander auf, weil $\alpha . m\beta = - m\beta . \alpha$ ist.

bringen; nämlich es werden dann jene Kräfte gleich

$$\alpha \,.\, (\alpha + m\beta + p), \quad m\beta \,.\, (\alpha + m\beta + p).$$

Wenn nun m nicht gleich -1 ist, so stellt der zweite Faktor einen vielfachen Punkt dar (mit dem Gewichte $1 + m$); beide Kräfte wirken dann auf einen Punkt, und sind somit ihrer Summe gleichwirkend; diese Summe ist

$$(\alpha + m\beta) \,.\, (\alpha + m\beta + p),$$

das heisst, sie ist gleich

$$(\alpha + m\beta) \,.\, p \,.$$

Und so sind also die beiden Kräfte $\alpha \,.\, p$ und $m\beta \,.\, p$, wenn nicht m gleich -1, das heisst wenn nicht die Summe ihrer Ausweichungen null ist, Einer Kraft $(\alpha + m\beta) \,.\, p$, das heisst ihrer Summe gleichwirkend.

Da nun die Wirkungslinien zweier Kräfte, die in Einer Ebene liegen, sich entweder schneiden oder parallel laufen, so folgt überhaupt, dass zwei Kräfte, welche in Einer Ebene liegen, jedesmal, wenn ihre
175 Ausweichungen nicht zur Summe Null geben, Einer Kraft | gleichwirkend sind, welche die Summe jener Kräfte ist.

Betrachten wir nun noch den Fall, den wir bisher ausschlossen, dass nämlich die Ausweichungen beider Kräfte zusammen null, das heisst beide Kräfte, als Strecken betrachtet, entgegengesetzt gleich sind, so leuchtet ein, dass beide dann aber auch nur dann im Gleichgewicht sind, wenn sie in derselben Richtungslinie liegen, das heisst die Summe der Kräfte selbst null ist. In diesem besonderen Falle können wir also auch noch sagen, dass beide Kräfte ihrer Summe gleichwirkend sind. Es bleibt daher nur der Fall noch zu untersuchen, wo beide Kräfte als Strecken zur Summe Null geben, als Liniengrössen aber nicht.

In diesem Falle nun ist nach der zweiten Voraussetzung nicht Gleichgewicht vorhanden; aber wir können auch leicht zeigen, dass es dann keine geltende Kraft gebe, welche jenen beiden Kräften das Gleichgewicht halte. Denn aus den beiden Voraussetzungen, die wir zu Anfang dieses Paragraphen aufstellten, geht hervor, dass die Ausweichung der Gesammtkraft stets die Summe ist aus den Ausweichungen
176 der einzelnen Kräfte. Also müsste hier die Ausweichung der | fraglichen Kraft null sein, das heisst, diese Kraft selbst müsste null sein und die gegebenen Kräfte schon im Gleichgewichte stehen, was wider die Annahme ist. Somit haben wir in der That gezeigt, dass zwei Kräfte, welche in parallelen, von einander getrennten Linien wirken, und als Strecken entgegengesetzt gleich sind, auf keine ihnen gleichwirkende einzelne Kraft zurückgeführt werden können. Dieser Fall ist