aber derselbe, in welchem die Kräfte keine Liniengrösse als Summe darbieten, sondern eine Ausdehnung zweiter Stufe; in der That ist $\alpha . p - \beta . p$ gleich $(\alpha - \beta) . p$, was eine Ausdehnung zweiter Stufe darstellt.

Um die Bedeutung dieses Falles für die Statik näher in's Auge zu fassen, bemerken wir, dass das Gesammtmoment zweier solcher Kräfte in Bezug auf alle Punkte im Raume, das heisst die Gesammtabweichung derselben von allen Punkten, eine konstante Grösse ist. In der That, da die gesammte Abweichung gleich der Abweichung der Summe ist, die Summe aber hier eine Ausdehnung zweiter Stufe ist, und die Abweichung einer Ausdehnung immer dieser selbst gleich ist, so folgt, dass die Gesammtabweichung jener beiden Kräfte von jedem beliebigen Punkte der Summe dieser beiden Kräfte selbst gleich ist, also konstant bleibt, sobald diese Summe es bleibt. Wir sagen daher, es seien beide | Kräfte diesem Moment, welches durch ihre Summe 176
dargestellt wird, gleichwirkend*). Somit können wir nun den Satz aufstellen:

Zwei oder mehrere Kräfte, welche in Einer Ebene wirken, sind ihrer Summe gleichwirkend.

Nämlich von zwei Kräften lässt sich dies sogleich auf beliebig viele übertragen.

§ 122. Allgemeines Gesetz für das Gleichgewicht.

Gehen wir zur Betrachtung der Kräfte im Raume über, so haben wir daran zu erinnern, dass die Addition von Kräften als Elementargrössen zweiter Stufe nur dann eine reale Bedeutung hat, wenn dieselben in Einer Ebene als einem Systeme dritter Stufe liegen, hingegen eine bloss formelle Bedeutung gewinnt, wenn | dies nicht der 177
Fall ist. Vermöge dieser formellen Bedeutung wurden zwei solche Summen einander gleich gesetzt, wenn sie durch Anwendung der realen Addition und der allgemeinen additiven Verknüpfungsgesetze sich auf denselben Ausdruck zurückführen lassen.

Betrachten wir nun zwei solche Summen von Kräften im Raume, welche sich auf diese Weise auf denselben Ausdruck zurückführen lassen, und bedenken, dass bei der realen Addition, weil dabei die

*) Es ist dies also als eine Erweiterung des Begriffs des Gleichwirkens anzusehen, indem das Moment selbst als eine eigenthümliche Kraftgrösse aufgefasst ist, welche mit andern Kräften zusammenwirken kann; dadurch ist die in der Statik so wichtige Theorie der Kräftepaare in ihrem wahren Gesichtspunkte aufgefasst.

Kräfte in Einer Ebene liegen, die Summe der Kräfte jedesmal der Gesammtheit der einzelnen Kräfte, welche ihre Stücke bilden, gleichwirkend sei: so folgt, dass bei jener Umwandlung der formellen Summe in eine ihr gleiche, jedesmal die Kräfte, welche diese Summe bilden, einander gleichwirkend bleiben, also „dass zwei Vereine von Kräften, welche gleiche Summe darbieten, allemal einander gleichwirkend sind“, also auch, „dass eine Reihe von Kräften, deren Summe null ist, im Gleichgewicht ist“.

Nun können wir ferner jede Summe von Kräften auf Eine Kraft, deren Angriffspunkt willkührlich ist, und Ein Moment, oder auch auf zwei Kräfte zurückführen. In der That, setzen wir die Summe mehrerer Kräfte gleich

$$\alpha . p + M,$$

wo α ein Element, p eine Strecke, $\alpha . p$ also eine Kraft, M aber eine
177 Ausdehnung zweiter Stufe, also ein Moment darstellt: so werden nach den oben dargestellten Sätzen beide Ausdrücke dann und nur dann gleich sein, wenn sie gleiche Ausweichung und von irgend einem Elemente, zum Beispiel α, gleiche Abweichung haben; es muss also dann p gleich der Summe aller Ausweichungen, welche die einzelnen Kräfte darbieten, und M gleich der Summe aller Abweichungen von dem Elemente α sein; da aber beide Summen stets real sind, die erste als Summe von Strecken, die letzte als Summe von Ausdehnungsgrössen zweiter Stufe in einem Systeme dritter Stufe, so lässt sich jene Reihe von Kräften allemal auf die angegebene Form bringen, und zwar ist α willkührlich, dann aber p und M bestimmt. Kann man nun jene Kraftsumme auf den Ausdruck $\alpha . p + M$ bringen, so kann man sie auch auf die Summe zweier Kräfte bringen; ist zum Beispiel M gleich $r . s$, so kann man von dem Gliede $\alpha . p$ das Glied $\alpha . s$ subtrahiren und dasselbe Glied zu M addiren, ohne den Werth der Summe zu ändern, und erhält so

178 $$\alpha . p + M = \alpha . (p - s) + (\alpha + r) . s,$$

wo die rechte Seite zwei Kräfte darstellt. Da endlich zwei Vereine von Kräften, welche gleiche Summen haben, einander gleichwirkend sind, wie wir oben zeigten, so hat man den Satz, „dass sich jede Reihe von Kräften im Raume auf zwei Kräfte oder auf eine Kraft und ein Moment zurückführen lassen, welche ihnen gleichwirkend sind und dieselbe Summe liefern, wie jene Kräfte.“

Hieran schliesst sich sogleich die Folgerung, „dass mehrere Kräfte auch nur dann im Gleichgewicht sind, wenn ihre Summe null ist“; denn auf zwei ihnen gleichwirkende Kräfte, welche auch dieselbe Summe liefern, lassen sie sich zurückführen, aber zwei Kräfte sind nach der zweiten Voraussetzung nur dann im Gleichgewichte, wenn ihre Summe null ist, alsdann wird aber auch die Summe der gegebenen Kräfte, da sie dieselbe ist, null sein; also ist jener Satz bewiesen.

Wenn nun zwei Vereine von Kräften einander gleichwirkend sind, so müssen die des einen Vereins mit den entgegengesetzt genommenen Kräften des andern (nach der Definition des Gleichwirkens) zusammengesetzt Gleichgewicht geben, das heisst nach dem vorigen Satze, ihre Summe muss null sein, also müssen dann die Kräfte des einen Vereins dieselbe Summe liefern, wie die des andern; somit haben wir bewiesen, „dass zwei Vereine gleichwirkender | Kräfte nothwendig gleiche Sum- 178
men liefern." Fassen wir diesen Satz mit dem umgekehrten, den wir vorher bewiesen haben, zusammen, so erhalten wir den Satz:

Dass zwei Vereine von Kräften dann und nur dann einander gleichwirkend sind, wenn sie gleiche Summen liefern.

Dieser Satz berechtigt uns, die Gesammtwirkung mehrerer Kräfte als die Wirkung ihrer Summe aufzufassen, auch dann, wenn diese Summe sich nicht mehr als einzelne Kraft darstellen lässt; wir haben somit den allgemeinen Satz:

Zwei oder mehrere Kräfte sind ihrer Summe gleichwirkend, und sind nur dann im Gleichgewichte, wenn ihre Summe null ist.

Dieser Satz umfasst alle früheren und erscheint als deren Endresultat.

§ 123. Allgemeine Beziehung zwischen den statischen Momenten.

Dass nun zwei Vereine gleichwirkender Kräfte in Bezug auf jeden Punkt und jede Axe gleiches Gesammtmoment | haben, dass zwei Ver- 179
eine von Kräften, welche gleiche Gesammtausweichung und in Bezug auf irgend einen Punkt gleiches Moment haben, einander gleichwirkend sind und in Bezug auf jeden Punkt und jede Axe gleiches Moment haben, sind jetzt, nachdem wir einen Verein von Kräften als ihrer Summe gleichwirkend dargestellt haben, nur andere Ausdrucksweisen der von uns in der abstrakten Wissenschaft aufgestellten Sätze. — Wir halten uns daher mit der Ableitung jener statischen Gesetze nicht weiter auf, und wollen statt dessen einen allgemeinern Satz über die Theorie der Momente aufstellen, welcher alle Sätze, die man bisher über diese Theorie aufgestellt hat, an Allgemeinheit weit übertrifft, und dennoch durch unsere Analyse sich auf's einfachste ergiebt.

Um diesen Satz sogleich in einer leichtfasslichen Form zu geben, will ich einen neuen Begriff einführen, welcher für die Betrachtung der Verwandtschaftsbeziehungen überhaupt von der grössten Wichtigkeit ist. Nämlich ich sage, *dass ein Verein von Grössen in derselben Zahlenrelation stehe, wie ein anderer Verein entsprechender Grössen, wenn jede Gleichheit, welche zwischen den Vielfachensummen aus den Grössen des letzten Vereins stattfindet, auch bestehen bleibt, wenn man statt dieser Grössen die entsprechenden des ersten Vereins setzt.* Der Satz, den wir hier beweisen wollen, lässt sich nun in der Form darstellen:

179 *Die Gesammtmomente eines Kräftevereins in Bezug auf verschiedene Punkte oder Axen stehen in derselben Zahlenrelation, wie diese Punkte oder Axen.*

Denn ist S die Summe des Kräftevereins, so ist das Gesammtmoment desselben in Bezug auf irgend eine Grösse A (sei dieselbe nun ein Punkt oder eine Axe) gleich der Ausweichung des Produktes $A \,.\, S$; sind nun verschiedene Beziehungsgrössen A, B, ... gegeben, und herrscht zwischen denselben eine Zahlenrelation, welche sich in der Form

$$\mathfrak{a}A + \mathfrak{b}B + \cdots = 0,$$

wo $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, ... Zahlengrössen sind, darstellen lässt, so wird auch, wenn man mit S multiplicirt,

$$\mathfrak{a}A \,.\, S + \mathfrak{b}B \,.\, S + \cdots = 0$$

sein; diese Gleichung bleibt nun nach § 112 auch bestehen, wenn
180 man statt der Produkte $A \,.\, S$, ... ihre Ausweichungen, das heisst die Momente von S in Bezug auf jene Grössen setzt; also stehen diese Momente in derselben Zahlenrelation, wie die Beziehungsgrössen.

Vermittelst dieses Satzes können wir also aus den Momenten in Bezug auf zwei Punkte das Moment in Bezug auf jeden andern Punkt derselben geraden Linie finden, und ebenso aus den Momenten in Bezug auf drei Punkte, die nicht in Einer geraden Linie liegen, das jedem andern Punkte derselben Ebene zugehörige; aus den Momenten in Bezug auf vier Punkte, die nicht in einer Ebene liegen, das jedem andern Punkte des Raumes zugehörige; ferner aus den Momenten in Bezug auf zwei Axen, die sich schneiden, das Moment in Bezug auf jede andere durch denselben Punkt gehende und in derselben Ebene liegende Axe; aus den Momenten in Bezug auf drei Axen derselben Ebene, welche nicht durch Einen Punkt gehen, das jeder andern Axe derselben Ebene; und überhaupt aus den Momenten in Bezug auf eine Reihe von Axen, welche in keiner Zahlenrelation zu einander stehen, das Moment in Bezug auf jede Axe, welche zu ihnen in bestimmter Zahlenrelation steht.

§ 124. Wann ein Verein von Kräften einer einzelnen Kraft gleichwirkt.

Ich schliesse diese Anwendung mit der Lösung der Aufgabe, die Bedingungsgleichung zu finden, welche bestehen muss, wenn ein System von Kräften einer einzelnen Kraft oder einem Moment gleichwirkend sein soll.

In beiden Fällen wird die Summe der Kräfte S als Produkt | zweier 180
Elementargrössen erster Stufe dargestellt werden können, und daraus folgt für diesen Fall sogleich die Gleichung

$$S \, . \, S = 0,$$

eine Gleichung, welcher nie genügt wird, wenn S eine formelle Summe darstellt; denn dann lässt sich S als Summe zweier Kräfte darstellen, welche nicht in derselben Ebene liegen; es seien dies A und B, also

$$S = A + B,$$

so ist

$$\begin{aligned} S \, . \, S &= (A + B) \, . \, (A + B) \\ &= \quad 2A \, . \, B, \end{aligned}$$

weil nämlich $A \, . \, A$ und $B \, . \, B$ null sind, $A \, . \, B$ aber gleich $B \, . \, A$ | ist*); *181*
da nun A und B nicht derselben Ebene angehören, so kann auch $A \, . \, B$ nicht null sein, also ist jene Gleichung

$$S \, . \, S = 0$$

die nothwendige, aber auch ausreichende Bedingungsgleichung für den Fall, dass S eine einzelne Kraft oder ein einzelnes Moment darstellen soll; und zwar wird sie ein Moment darstellen, wenn die Ausweichung von S null ist, im entgegengesetzten Falle eine Kraft von geltendem Werthe.

Ist

$$S = A + B + C + \cdots,$$

so wird

$$S \, . \, S = 2A \, . \, B + 2A \, . \, C + 2B \, . \, C + \cdots,$$

also gleich der Summe aus den Produkten zu zwei Faktoren, die sich aus den Stücken bilden lassen**). Daraus folgen sogleich die Sätze:

Ein Verein von Kräften ist dann und nur dann einer einzelnen Kraft oder einem einzelnen Moment gleichwirkend, wenn die Summe der Produkte zu zwei Faktoren, welche sich aus den Kräften bilden lassen, null ist.

---

*) Nämlich weil A und B Grössen zweiter, also gerader Stufe sind, welche sich nach § 55 ohne Zeichenwechsel vertauschen lassen.

**) Nämlich gleich der einfachen Summe, wenn man die Produkte $A \, . \, B$ und $B \, . \, A$ als verschieden gebildete betrachtet.

Ferner

Zwei Vereine von Kräften können nur dann einander gleichwirkend
181 *sein, wenn die Produkte zu zwei Faktoren, welche sich | aus den Kräften des einen Vereins bilden lassen, gleiche Summe liefern wie die aus den Kräften des andern gebildeten.*

Diese Sätze bleiben auch noch bestehen, wenn man statt der Produkte zweier Kräfte überall ihre sechsten Theile, nämlich die Pyramiden, welche die Kräfte zu gegenüberliegenden Kanten haben, einführt.

Drittes Kapitel.

Das eingewandte Produkt*).

A. Theoretische Entwickelung.

§ 125. Formelle Erklärung des eingewandten Produktes; Grad der Abhängigkeit und der Multiplikation.

182 Der Begriff des Produktes als eines äusseren bestand darin, dass jedes Stück eines Faktors, welches von dem andern Faktor abhängig war, ohne Werthänderung des Produktes weggelassen werden konnte, worin zugleich lag, dass das Produkt zweier abhängiger Grössen null sei. Reale Grössen, das heisst solche, die sich als Produkte aus lauter einfachen Faktoren darstellen lassen, wurden dann „von einander unabhängig“ genannt, wenn jeder einzelne Faktor derselben ganz ausserhalb desjenigen Systems lag, was durch die übrigen Faktoren bestimmt war, oder, mehr abstrakt ausgedrückt, wenn keine Grösse, die dem Systeme von einer der Grössen angehört, zugleich dem durch die sämmtlichen übrigen bestimmten Systeme angehört. Da nun diese Bestimmung, welche das Produkt als ein äusseres charakterisirt, nicht in dem Begriffe des Produktes an sich liegt, so muss es möglich sein, den allgemeinen Begriff des Produktes festzuhalten, und doch jene Bestimmung aufzugeben, oder durch eine andere zu ersetzen. Um nun diese neue Bestimmung aufzufinden, müssen wir, da nach ihr auch das Produkt zweier abhängiger Grössen soll einen geltenden Werth haben können, die verschiedenen Grade der Abhängigkeit untersuchen.

Wenn zwei Systeme höherer Stufen überhaupt von einander abhängig sind, so wird es Grössen geben, welche beiden zugleich angehören. Da nun jedes System, welches gewisse Grössen enthält, auch

*) Vgl. zu diesem Kapitel den zweiten Anhang. (1877.)

sämmtliche von ihnen abhängige Grössen, das heisst das ganze durch
sie bestimmte System, also auch das äussere Produkt jener Grössen,
enthalten muss, so folgt, | dass Systeme, welche gewisse Grössen ge- 182
meinschaftlich enthalten, auch das ganze durch diese Grössen bestimmte
System, also auch das äussere Produkt derselben, gemeinschaftlich ent-
halten werden; nach der Stufenzahl dieses gemeinschaftlichen Systemes
wird nun auch der Grad der Abhängigkeit bestimmt werden können,
und wir werden sagen können, zwei Systeme seien im m-ten Grade
von einander abhängig, wenn sie ein System m-ter Stufe gemein-
schaftlich enthalten, und ebenso, zwei reale Grössen seien im m-ten
Grade von einander | abhängig, wenn die durch sie bestimmten Systeme 183
es sind, oder wenn sie sich auf einen gemeinschaftlichen Faktor m-ter
Stufe bringen lassen (und auf keinen höheren). Dies letztere nämlich
folgt aus dem Vorhergehenden, da nach § 61 jede Grösse, welche dem
durch eine andere Grösse bestimmten Systeme angehört, auch als Faktor
der letzteren angesehen werden kann*).

Jedem Grade der Abhängigkeit nun entspricht eine Art der Multiplikation; wir fassen alle diese Arten der Multiplikation unter dem Namen der eingewandten Multiplikation zusammen, und verstehen ins Besondere unter dem *eingewandten Produkt m-ter Stufe* dasjenige, in welchem ohne Werthänderung desselben in jedem Faktor nur ein solches Stück weggelassen werden kann, welches von dem andern Faktor in einem höheren, als dem m-ten Grade abhängig ist; und zwar nennen wir das eingewandte Produkt m-ter Stufe ein reales, wenn die Faktoren wenigstens im m-ten Grade von einander abhängen, hingegen ein formales, wenn in einem niederen**). Der Werth des eingewandten Produktes besteht dann eben in demjenigen, was bei jenen verstatteten Aenderungen konstant bleibt. Nur das reale Produkt ist es jedoch, was wir hier der Betrachtung unterwerfen, indem das formale eine andere Behandlungs- und Bezeichnungsweise erfordert, und überdies von viel geringerer Bedeutung ist.

Das reale eingewandte Produkt hat nun entweder einen geltenden
Werth, oder es ist null, und zwar wird es nicht nur, wie jedes Pro-
dukt, null, wenn ein Faktor es wird, sondern auch, wenn die | beiden 183
Faktoren in einem höheren Grade von einander abhängen, als die Stufe
der eingewandten Multiplikation beträgt. Nämlich dies letztere folgt

*) Von den unabhängigen Grössen würden wir also sagen können, sie seien im nullten Grade, das heisst eben gar nicht abhängig von einander.

**) Der formale Begriff des eingewandten (regressiven) Produktes ist in der Ausdehnungslehre von 1862 als unfruchtbar aufgegeben und dadurch die ganze Sache vereinfacht worden. (1877.)

daraus, dass man dann einen Faktor als Summe betrachten kann, deren eines Stück null und deren anderes er selbst ist, und dass man dann nach der vorhergehenden Definition dies Stück weglassen darf, wodurch das Produkt gleich Null erscheint.

§ 126. **Beziehung zwischen dem gemeinschaftlichen und dem nächstumfassenden Systeme.**

Um die Bedeutung des realen eingewandten Produktes darlegen zu können, haben wir das Nullwerden desselben abhängig zu machen
184 von dem Systeme, welchem beide Faktoren | angehören, während wir es bisher von dem gemeinschaftlichen Systeme beider Faktoren oder von dem Grade ihrer gegenseitigen Abhängigkeit bedingt sein liessen.

Wir stellen uns zu dem Ende die Aufgabe: „Wenn das zweien Grössen gemeinschaftliche System gegeben ist, das sie zunächst umfassende System, das heisst das niedrigste*) System, welchem beide zugleich angehören, zu finden."

Wir erinnern hierbei daran, dass eine Grösse einem Systeme dann und nur dann angehört, wenn sie einer andern Grösse, die dies System darstellt, untergeordnet ist, das heisst, sich dieselbe als äusserer Faktor dieser letzteren Grösse darstellen lässt. Wenn daher A und B die beiden Grössen sind, und C ihr gemeinschaftliches System darstellt, so wird sich C als äusserer Faktor sowohl von A als von B darstellen lassen, also zum Beispiel B auf die Form CD gebracht werden können.

Indem wir C als das gemeinschaftliche System für A und B setzen, so meinen wir damit nach dem vorigen Paragraphen, dass C alle Grössen in sich enthalte, welche dem A und B gemeinschaftlich angehören, aber auch keine andern. Daraus folgt, dass D keine Grösse mit A gemeinschaftlich haben kann, weil sonst auch CD, das heisst B noch Grössen mit A gemeinschaftlich haben würde, welche nicht dem Systeme von C angehörten, wider die Annahme. Da nun hiernach A und D von einander unabhängig sind, das Produkt AD also als äusseres einen geltenden Werth hat, so werden zuerst beide Grössen A und B diesem Produkte AD untergeordnet sein, indem A unmittelbar als äusserer Faktor desselben erscheint, von den beiden Faktoren der Grösse B oder CD aber der eine C in A enthalten ist, der andere
184 unmittelbar in | jenem Produkte AD erscheint, also auch B selbst als äusserer Faktor dieses Produktes darstellbar ist. Dass es aber keine Grösse von niederer Stufe giebt, welcher beide Grössen A und B unter-

*) Darunter ist natürlich das System, was die kleinste Stufenzahl hat, zu verstehen.

geordnet sind, folgt sogleich, da eine solche Grösse sowohl A als D zu äusseren Faktoren haben muss, also, da beide von einander unabhängig sind, auch ihr Produkt AD (§ 125) als äusseren Faktor enthalten muss. Also stellt AD das jene Grössen A und B zunächst umfassende System dar, und die Aufgabe ist gelöst. Hierin liegt der Satz:

Wenn zwei Grössen A und B als höchsten gemeinschaftlichen Faktor 185
eine Grösse C haben, und man setzt eine derselben, zum Beispiel B, gleich dem äusseren Produkt CD, so stellt das Produkt der andern in die Grösse D, nämlich das Produkt AD, das nächstumfassende System dar.

Bezeichnen wir die Stufenzahlen der vier Grössen A, B, C, D mit den entsprechenden kleinen Buchstaben, die des nächstumfassenden Systemes mit u, so haben wir u gleich $a + d$, oder da $B = CD$, also $b = c + d$ ist,

$$u = a + b - c;$$

oder

$$u + c = a + b,$$

oder

$$c = a + b - u,$$

das heisst:

Die Stufenzahlen zweier Grössen sind zusammengenommen ebenso gross, als die Stufenzahl des ihnen gemeinschaftlichen Systemes und die des sie zunächst umfassenden zusammengenommen;

oder

aus der Stufenzahl des gemeinschaftlichen Systems zweier Grössen findet man die des nächstumfassenden, indem man jene von der Summe der Stufenzahlen, welche jenen einzelnen Grössen zugehören, subtrahirt;

oder

aus der Stufenzahl des zwei Grössen zunächst umfassenden Systemes findet man die des gemeinschaftlichen durch Subtraktion der ersteren von der Summe der Stufenzahlen beider Grössen.

In der letzten Form ist dieser allgemeine Satz besonders für die Anwendung bequem, wie sich leicht zeigt, wenn man ihn auf die 185
Geometrie zu übertragen versucht.*)

---

*) Betrachte ich zum Beispiel die Ebene als das nächstumfassende System zweier Linien, so wird, da jene als Elementarsystem von dritter, diese von zweiter Stufe sind, das gemeinschaftliche System von $(2 + 2 - 3)$-ter, das heisst von erster Stufe sein, und somit entweder durch einen Punkt oder durch eine Richtung dargestellt sein. Somit haben wir dann den Satz: „Zwei gerade Linien, welche in derselben Ebene liegen, ohne zusammenzufallen, schneiden sich entweder in Einem Punkte oder laufen parallel.“ Wird der Raum als nächstumfassendes System gedacht, so haben wir die Sätze: „Zwei Ebenen, welche nicht zusammenfallen, schneiden sich entweder in einer geraden Linie, oder liegen ein-

§ 127. Einführung des Beziehungssystemes.

186 Es hatte nach § 125 ein eingewandtes Produkt zweier geltenden Werthe dann und nur dann wiederum einen geltenden realen Werth, wenn die Stufe des ihnen gemeinschaftlichen Systems gleich war der Stufe der eingewandten Multiplikation, oder, mit Anwendung des im vorigen Paragraphen bewiesenen Gesetzes, wenn die Stufe des nächstumfassenden Systemes und die der eingewandten Multiplikation zusammen gleich der Stufensumme beider Faktoren sind.

Nennen wir nun im Allgemeinen diejenige Zahl, welche die Stufe der eingewandten Multiplikation zur Stufensumme beider Faktoren ergänzt, die *Beziehungszahl* des eingewandten Produktes oder der eingewandten Multiplikation, so folgt, dass das eingewandte Produkt zweier geltenden Werthe nur dann und immer dann einen geltenden, realen Werth liefert, wenn die Stufe des nächstumfassenden Systemes gleich der Beziehungszahl des Produktes ist. Wurde die Stufenzahl des gemeinschaftlichen Systemes grösser als die Stufe der eingewandten Multiplikation, so wurde das Produkt nach § 125 null, wurde sie kleiner, so erhielt das Produkt einen bloss formalen Werth. Bleiben nun die Stufen beider Faktoren dieselben, so wird, wenn die Stufe des gemeinschaftlichen Systemes wächst, die des nächstumfassenden Systemes abnehmen und umgekehrt, weil beide eine konstante Summe haben, nämlich die Stufensumme beider Faktoren. Daraus folgt, dass ein eingewandtes Produkt zweier geltender Werthe null wird, wenn
186 die Stufe des sie zunächst umfassenden | Systemes kleiner wird als die Beziehungszahl; und einen formalen Werth erhält, wenn sie grösser wird.

Wenn also ein System von h-ter Stufe gegeben ist, und wir wissen, dass alle in Betracht gezogenen Grössen diesem Systeme als Hauptsystem (s. § 80) angehören, so sind wir auch sicher, dass das eingewandte Produkt, dessen Beziehungszahl h ist, einen realen Werth haben werde. Wir nennen dann diese eingewandte Multiplikation eine auf jenes System *bezügliche*, und nennen dies System das *Be-*
187 *ziehungssystem* | des Produktes*), und wenn diesem Beziehungssysteme zugleich beide Faktoren angehören, so nennen wir dasselbe auch (der früheren Benennungsweise gemäss) das Hauptsystem des

---

ander parallel"; „eine Linie, welche nicht ganz in einer Ebene liegt, schneidet diese entweder in einem Punkte, oder liegt mit ihr parallel"; „zwei Ebenen, welche nicht parallel sind, haben eine Richtung, aber auch nur Eine gemeinschaftlich."

*) Die Stufenzahl dieses Systemes ist eben die Zahl, die wir oben Beziehungszahl nannten.

Produktes. Dann können wir sagen, das eingewandte Produkt sei immer ein reales, wenn die Faktoren dem Beziehungssysteme angehören, es sei zugleich von geltendem Werthe, wenn das die Faktoren zunächst umfassende System zugleich das Beziehungssystem des Produktes ist, und es sei null, wenn das nächstumfassende System beider Faktoren dem Beziehungssysteme des Produktes untergeordnet und [also] von niederer Stufe ist.

§ 128. **Dadurch ist die Einheit der äusseren und der eingewandten Multiplikation vermittelt.**

Das äussere Produkt zweier geltender Grössen zeigte sich nach § 55 dann als null, wenn sie von einander abhängig sind, das heisst, wenn die Stufe des sie zunächst umfassenden Systemes kleiner ist als die Stufensumme der beiden Faktoren; oder, da wir für das äussere Produkt jedes System, welchem die Faktoren untergeordnet sind, und dessen Stufenzahl grösser oder eben so gross ist, wie jene Summe, als Beziehungssystem ansehen können, so können wir, das Gesetz des vorigen Paragraphen erweiternd, sagen:

Ein Produkt zweier geltenden Werthe ist dann und nur dann null, wenn die Faktoren von einander abhängig sind, und zugleich ihr nächstumfassendes System niedriger ist als das Beziehungssystem.

Hierin liegt dann zugleich, „dass ein solches Produkt nur dann einen geltenden Werth hat, wenn entweder beide Faktoren von einander unabhängig sind, oder ihr nächstumfassendes System das Beziehungssystem ist.“ Und zwar ist im ersteren Falle das Produkt ein äusseres, im letzteren ein eingewandtes. Wenn beide Bedingungen | zu- 187
gleich eintreten, das heisst beide Faktoren von einander unabhängig sind und zugleich ihr nächstumfassendes System das Beziehungssystem ist, so kann die Multiplikation nicht nur als äussere, sondern auch als eingewandte nullten Grades aufgefasst werden. Dadurch erweitert sich der zweite Satz des vorigen Paragraphen zu folgendem Satze:

Wenn in einem Produkte zweier geltenden Werthe die Stufensumme 188
der Faktoren kleiner ist als die Beziehungszahl, so ist das Produkt ein äusseres; ist jene Summe grösser, so ist das Produkt ein eingewandtes und zwar von so vielter Stufe, als der Ueberschuss jener Summe über die Beziehungszahl beträgt; ist endlich jene Summe dieser Zahl gleich, so kann das Produkt sowohl als äusseres, wie auch als eingewandtes nullter Stufe betrachtet werden.

Durch die Einführung des Beziehungssystemes oder des Hauptsystemes haben wir somit den wichtigen Vortheil errungen, dass es nun, wenn einmal das Beziehungssystem als Hauptsystem feststeht, nicht mehr nöthig ist, für das Produkt zweier Grössen die Multiplikationsweise noch besonders festzustellen, dass es daher nun auch als überflüssig erscheint, die äussere Multiplikation von der eingewandten, oder die verschiedenen Grade der letzteren durch die Bezeichnung zu unterscheiden.*)

§ 129. **Das eingewandte Produkt in der Form der Unterordnung.**

188 Um nun den geltenden Werth eines realen eingewandten | Produktes in einen einfachen Begriff zu fassen, müssen wir für das gegebene Produkt, dessen Werth zu ermitteln ist, alle Formen aufsuchen, in welchen es sich vermöge der in der Definition festgestellten formellen Multiplikationsgesetze darstellen lässt, ohne seinen Werth zu ändern. Das, was dann allen diesen Formen gemeinschaftlich ist, wird den Werth dieses Produktes unter einen einfachen Begriff gefasst darstellen.

189 Die vermöge der | Definition verstatteten Formänderungen sind erstens die allgemein multiplikative, dass man die Faktoren in umgekehrtem Verhältnisse ändern darf, und zweitens die besondere, dass man aus dem einen Faktor ein Stück weglassen darf, was von dem andern Faktor in einem höheren Grade abhängt, als die Stufe des eingewandten Produktes beträgt; oder, aufs Beziehungssystem zurückgeführt, dass man aus dem einen Faktor ein Stück weglassen darf, welches mit dem andern Faktor zusammen von einem Systeme umfasst wird, dessen Stufe kleiner ist als die Beziehungszahl.

Als einfachster Fall erscheint der, wo der eine Faktor das Beziehungssystem darstellt, der andere also ihm untergeordnet ist, oder kürzer ausgedrückt, wo das Produkt in F o r m d e r U n t e r o r d n u n g

*) Zugleich haben wir hierdurch den Vortheil einer leichteren Anwendbarkeit auf die Raumlehre gewonnen. Betrachten wir zum Beispiel die Ebene, also ein Elementarsystem dritter Stufe, als Hauptsystem, wie dies überall in der Planimetrie geschieht, so wird das Produkt zweier Elementargrössen in Bezug auf dies System dann und nur dann null sein, wenn sie von einander abhängig sind und zugleich einem System zweiter Stufe angehören, das heisst, wenn sie Punkte oder Richtungen gemeinschaftlich haben und zugleich in Einer geraden Linie liegen. Betrachten wir ferner den Raum, das heisst also ein Elementarsystem vierter Stufe als Hauptsystem, wie dies in der Stereometrie als solcher geschieht, so wird das darauf bezügliche Produkt zweier Elementargrössen dann und nur dann null sein, wenn sie in derselben Ebene liegen und zugleich von einander abhängig sind, das heisst Punkte oder Richtungen gemeinschaftlich haben; zum Beispiel das Produkt zweier Liniengrössen, welche sich schneiden oder einander parallel sind, das zweier Ebenen, wenn sie in einander liegen, und so weiter.

erscheint. Da hier das nächstumfassende System immer zugleich das Beziehungssystem ist, so kann keinem der Faktoren ein geltendes Stück hinzugefügt werden, ohne den Werth des Produktes zu ändern. Die einzige Formänderung, welche den Werth des Produktes ungeändert lässt, ist daher die allgemein multiplikative, dass nämlich die Faktoren sich in umgekehrtem Verhältnisse ändern dürfen, also

$$A \,.\, B = mA \,.\, \frac{B}{m}$$

gesetzt werden kann, wenn m irgend eine Zahlengrösse darstellt. Es bleiben somit bei allen verstatteten Formänderungen die Systeme der beiden Faktoren konstant, und ihre Grösse ändert sich dabei nur in umgekehrtem Verhältnisse. Die Zusammenschauung beider Systeme nebst dem auf beide Faktoren auf multiplikative Weise zu vertheilenden Quantum bildet daher den Werth jenes Produktes.

§ 130—132. **Reale Bedeutung des eingewandten Produktes; der auf ein Hauptmass bezügliche eigenthümliche Werth desselben.**

§ 130.

Sind in dem allgemeineren Falle A und B die beiden Faktoren des eingewandten Produktes, und stellt die Grösse C, deren Stufenzahl c sei, das beiden Faktoren gemeinschaftliche System dar, so wird, wenn B gleich CD gesetzt wird, AD nach § 126 | das nächstum- 189
fassende System, also auch nach § 128, wenn das Produkt nicht null ist, das Beziehungssystem darstellen.*)

Nun zeigten wir in § 129, dass dann ausser der allgemeinen multiplikativen | nur die Formänderung verstattet ist, dass der eine 190
Faktor CD um ein Stück wachse, welches von dem andern Faktor A in einem höheren als dem c-ten Grade abhängig ist. Es ist klar, dass dies Stück nicht mit CD gleichartig sein dürfe, weil ein solches mit A in demselben Grade der Abhängigkeit stehen würde, wie CD selbst; es muss also mit CD ungleichartig angenommen werden. Für die Addition der ungleichartigen Grössen hatten wir einen realen und einen formalen Begriff aufgestellt, von denen der erstere dann eintrat, wenn beide zu addirenden Grössen auf eine solche Weise in einfache Faktoren zerlegt werden können, dass sie alle bis auf Einen Faktor gemeinschaftlich enthalten. Da nun die formale Addition nur als abgekürzte Schreibart auftrat, so werden wir die Bedeutung unseres Produktes schon auffinden, wenn wir nur die reale Addition berücksichtigen, und

*) Wir setzen hier natürlich voraus, dass das Produkt nicht null sei, weil für den Fall, dass es null ist, keine Ermittelung seines Werthes mehr nöthig ist.

also annehmen, das hinzuzuaddirende Stück habe mit CD alle einfachen Faktoren mit Ausschluss Eines solchen gemeinschaftlich. Dieser Eine einfache Faktor nun wird, da das hinzuzuaddirende Stück von A in einem höheren als dem c-ten Grade abhängen soll, nothwendig dem Systeme von A angehören, während unter den übrigen einfachen Faktoren nothwendig die sämmtlichen einfachen Faktoren von C vorkommen müssen. Es wird sich also dies Stück in der Form CE darstellen lassen müssen, wo E von A abhängig ist. Hiernach wird nun das Produkt in der Form

$$A.(CD + CE)$$

oder

$$A.C(D + E)$$

erscheinen, wo E von A abhängig ist. Vergleichen wir nun die beiden Produkte

$$A.CD = A.C(D + E),$$

so stellt AD das nächstumfassende System für die Faktoren des ersten, $A(D + E)$ das für die Faktoren des zweiten Produktes dar; und da E von A abhängig, also

$$AD = A(D + E)$$

190 ist, so ist auch das nächstumfassende System für beide Produkte dasselbe.

Ausser dieser Formänderung ist nur noch die allgemein multiplikative verstattet, dass die Faktoren sich in umgekehrtem Zahlenverhältnisse ändern. Da hierdurch die Systeme der Faktoren nicht ge-
191 ändert werden, also das gemeinschaftliche und das | nächstumfassende System auch bei dieser Formänderung dieselben bleiben, so bleiben die genannten Systeme überhaupt bei jeder Formänderung des Produktes dieselben und gehören also zu demjenigen, was den konstanten Werth dieses Produktes ausmacht. Setzt man den gemeinschaftlichen äusseren Faktor C als den mittleren, so dass das Produkt, wie wir es schon oben darstellten, in der Form

$$.A.CD$$

erscheint, so giebt das Produkt der äusseren Faktoren AD das nächstumfassende System; und es stellen dann also sowohl der mittlere Faktor als das Produkt der beiden äusseren AD konstante Systeme dar.

Vergleichen wir beide Grössen C und AD auch ihrem Werthe nach, so haben wir nicht bloss diejenigen Umgestaltungen zu berücksichtigen, durch welche der Werth der eingewandten Faktoren A und CD, aber nicht der ihres Produktes $A.CD$ geändert wird, sondern auch diejenigen, welche den Werth des äusseren Produktes CD und das System seines ersten Faktors ungeändert lassen. Vermöge der ersten Art der

Umgestaltung konnte CD um ein Stück CE wachsen, in welchem E von A abhängig ist, vermöge der zweiten kann D um ein von C abhängiges Stück wachsen, welches dann gleichfalls von A abhängig sein muss, weil C dem A untergeordnet ist. Bezeichnen wir daher auch dies Stück mit E, so verwandelt sich in beiden Fällen das Produkt $A\,.\,CD$ in das ihm gleiche $A\,.\,C(D+E)$. Da nun E von A abhängig, also

$$A(D+E) = AD$$

ist, so ist in beiden Produkten sowohl der Werth des mittleren Faktors, als auch der Werth des Produktes aus den äusseren Faktoren derselbe geblieben. Ausserdem ist nun bei beiden Arten der Umgestaltung nur noch die allgemeine multiplikative Formänderung, nach welcher sich die Faktoren in umgekehrtem Verhältnisse ändern können, anwendbar. Wendet man diese Aenderung bei beiden Arten der Umgestaltung an, so wird jedesmal, wenn dem einen Faktor eine Zahl als Faktor hinzugefügt wird, einem andern dieselbe | Zahl als Divisor 191
hinzugefügt werden müssen; also auch, wenn von den drei Faktoren des Produktes einer, zum Beispiel C, m-mal grösser wird, so muss das Produkt der beiden andern m-mal kleiner werden, das heisst, C und AD müssen sich dann im umgekehrten Verhältnisse | ändern.*) 192
Da nun hierin zugleich schon liegt, dass ihre Systeme konstant bleiben, so können wir als Resultat der bisherigen Entwickelung den Satz aussprechen, „dass, wenn ein eingewandtes Produkt auf den Ausdruck $A\,.\,CD$ gebracht ist, in welchem der mittlere Faktor C das den beiden Faktoren des eingewandten Produktes, A und CD, gemeinschaftliche System darstellt, dann C und AD, das heisst der mittlere Faktor und das Produkt der beiden äussern sich nur im umgekehrten Verhältnisse ändern können, wenn das ganze Produkt konstanten Werth behalten soll.“

§ 131.

Um die Bedeutung des eingewandten Produktes vollständig zu gewinnen, bleibt noch die Frage zu beantworten, ob diese beiden Systeme, die durch den mittleren und durch das Produkt der äusseren Faktoren dargestellt sind, nebst dem auf sie in multiplikativer Weise zu vertheilenden Quantum, dasjenige, was bei ungeändertem Werthe

*) Geht zum Beispiel A über in mA, so wird CD übergehen in $\frac{CD}{m}$ oder $C\frac{D}{m}$; geht zugleich C über in nC, so geht $\frac{D}{m}$ über in $\frac{D}{mn}$; das Produkt der äusseren Faktoren AD ist dann übergegangen in $\frac{AD}{n}$, während C in nC übergegangen ist.

des eingewandten Produktes konstant bleibt, vollständig darstellen, oder mit andern Worten, ob, wenn sich jene Grössen C und AD in umgekehrtem Verhältnisse ändern, das Produkt $A.CD$ stets konstanten Werth behalte, vorausgesetzt, dass der mittlere Faktor C unausgesetzt das den beiden Faktoren A und CD gemeinschaftliche System darstelle.

Dass dies in der That der Fall sei, können wir leicht beweisen, wenn wir noch voraussetzen, dass die eingewandten Faktoren gleiche Stufenzahl behalten. Zu dem Ende seien $A.CD$ und $A'.C'D'$ zwei solche Produkte, in welchen der mittlere Faktor C oder C' das den beiden eingewandten Faktoren A und CD oder A' und $C'D'$ gemeinschaftliche System darstellt. Wir setzen voraus, dass beim Uebergange aus dem einen Ausdrucke in den andern AD sich im umgekehrten
192 Verhältnisse geändert habe | wie C (worin schon liegt, dass ihre Systeme konstant geblieben sind), und dass die Stufenzahl von A und die von CD dieselben geblieben seien. Wir wollen zeigen, dass beide Produkte $A.CD$ und $A'.C'D'$ einander gleich seien.

193 Zunächst können wir | das letztere auf die Form bringen, dass der mittlere Faktor derselbe sei, wie in dem ersten Produkte, wodurch dann auch das Produkt der beiden äusseren in beiden gleichen Werth erhalten wird. Es sei dann das letztere Produkt übergegangen in $A_1.CD_1$, so haben wir nun die einfachere Voraussetzung, dass

$$AD = A_1 D_1$$

ist, und A und A_1 ebenso wie D und D_1 von gleicher Stufe sind; und zu beweisen bleibt dann nur, dass

$$A.CD = A_1.CD_1$$

sei. Zwei gleiche äussere Produkte, deren entsprechende Faktoren gleiche Stufenzahlen haben (wie hier AD und A_1D_1), müssen aber durch eine Reihe von Formänderungen aus einander erzeugbar sein, welche theils darin bestehen, dass die Faktoren sich in umgekehrtem Verhältnisse ändern, theils darin, dass der eine Faktor um ein von dem andern abhängiges Stück wächst. Bei der ersten Aenderungsart ist unmittelbar einleuchtend, dass sich auch der Werth des eingewandten Produktes $A.CD$ nicht ändere. Bei der letzten kann entweder D um ein von A abhängiges Stück, oder A um ein von D abhängiges wachsen. Geht also zuerst D in $D+E$ über, wo E von A abhängig ist, so geht $A.CD$ in $A.C(D+E)$ oder in $A.(CD+CE)$ über. Da hier E von A abhängig, C aber dem A untergeordnet, also im c-ten Grade von ihm abhängig ist, so ist CE in einem höheren als dem c-ten Grade von A abhängig, kann also als Stück des andern Faktors weggelassen werden, es ist also der Werth des Produktes noch derselbe geblieben. Zweitens konnte der Faktor A um ein von D abhängiges Stück wachsen. Es sei A gleich CF, so muss nun, wenn C noch immer, wie wir voraussetzten, das gemeinschaftliche System darstellen soll, das Wachsen des Faktors A um ein von D abhängiges Stück dadurch bewirkt werden, dass F um ein von D abhängiges Stück wächst; dies wird dann, aus demselben Grunde wie vorher der Zuwuchs von D, den Werth des ganzen Produktes ungeändert lassen.

Somit sehen wir, dass bei allen Aenderungen, welche den Werth des mittleren Faktors und den des Produktes | der beiden äusseren un- 193
geändert lassen, auch der Werth des gesammten Produktes ungeändert bleibt; oder, indem wir noch einen Schritt weiter zurückgehen, dass, wenn sich jene Grössen C | und AD in umgekehrtem Verhältnisse 194
ändern, der Werth des Produktes $A.CD$ unter der Voraussetzung, dass die Stufenzahlen von A und CD dieselben bleiben, sich nicht ändere. Fassen wir hiermit das Resultat des vorigen Paragraphen zusammen, so können wir sagen, „der Werth eines eingewandten Produktes bestehe, wenn die Stufenzahlen der Faktoren gegeben sind, in dem gemeinschaftlichen und nächstumfassenden Systeme beider Faktoren nebst dem auf beide Systeme multiplikativ zu vertheilenden Quantum."

§ 132.

Es erscheint hiernach der Begriff des eingewandten Produktes noch abhängig von den Stufenzahlen, sofern nach den bisherigen Bestimmungen zwei Produkte noch nicht als gleich betrachtet werden konnten, so lange ihre Faktoren ungleiche Stufenzahl besassen. Diese Abhängigkeit des Begriffes von den Stufenzahlen führt in denselben eine Beschränkung hinein, welche der Einfachheit des Begriffs schadet und der analytischen Behandlung widerstrebt. Indem wir daher diese Beschränkung aufheben, setzen wir fest, *dass zwei eingewandte Produkte von geltendem Werthe* $A.CD$ und $A'.C'D'$, *in welchen die beiden letzten Faktoren durch äussere Multiplikation verknüpft sind, der mittlere aber das den beiden eingewandten Faktoren* (A *und* CD, *oder* A' *und* $C'D'$) *gemeinschaftliche System darstellt, einander gleich seien, sobald überhaupt das Produkt der äussersten Faktoren und der mittlere in beiden Ausdrücken gleich sind, oder in umgekehrtem Verhältnisse stehen*, gleich viel, ob die Stufenzahlen der entsprechenden Faktoren übereinstimmen oder nicht.*) Namentlich können wir durch diese Bestimmung jedes

*) Zu einer solchen erweiterten Definition sind wir berechtigt, da über die Vergleichung von eingewandten Produkten mit ungleichen Stufenzahlen ihrer Faktoren noch nichts festgesetzt ist. Wir sind dazu gedrungen, wenn wir der Wissenschaft die ihr gebührende Einfachheit erhalten wollen.

eingewandte Produkt auf die Form der Unterordnung (s. § 129) bringen.

In der That ist hiernach

$$A . CD = AD . C,$$

wenn im ersten Produkte C und D durch äussere, A und CD durch eingewandte Multiplikation verknüpft sind, und C das gemeinschaft-
194 liche | System der beiden eingewandten Faktoren darstellt. Denn in dem letzten Ausdrucke kann AD als erster, C als mittlerer und die Einheit als letzter Faktor vorgestellt werden, welcher mit C (nach
195 [Abschn. I,] Kap. 4) durch äussere Multiplikation verknüpft ist, während C noch das gemeinschaftliche System darstellt. In dieser Form aufgefasst bietet der zweite Ausdruck dasselbe Produkt der äussersten Faktoren und denselben mittleren Faktor dar, wie der erste, und beide sind somit einander gleich.

Noch habe ich hier daran zu erinnern, dass, wenn das Produkt der äussersten Faktoren von niederer Stufe ist als das Beziehungssystem, dann beide Produkte gleichzeitig null werden (nach § 127), also auch für diesen Fall ihre Gleichheit bewahrt bleibt. Nehmen wir endlich einen bestimmten Theil H des Hauptsystems als Hauptmass (§ 87) an, so können wir jedes auf jenes Hauptsystem bezügliche eingewandte Produkt auf die Form bringen, dass der erste Faktor das Hauptmass wird. Nämlich wir können nach dem vorher Gesagten jedes solche Produkt, wenn es einen geltenden Werth hat, auf die Form bringen, dass der erste Faktor das Beziehungssystem oder hier das Hauptsystem darstellt, also auch, da wir die Faktoren in umgekehrtem Verhältnisse ändern können, auf die Form, dass der erste Faktor irgend ein bestimmter Theil des Hauptsystems, also auch dass er das Hauptmass wird. Ist das eingewandte Produkt null, so können wir den ersten Faktor beliebig setzen, wenn nur der zweite null ist, also kann auch in diesem Falle das Produkt auf die verlangte Form gebracht werden.

Wir nennen dann, wenn ein Produkt auf diese Form gebracht ist, den zweiten Faktor desselben *den eigenthümlichen* (*specifischen*) *Werth oder Faktor jener Produktgrösse in Bezug auf das Hauptmass* H, und sein System, welches zugleich das beiden Faktoren gemeinschaftliche System ist, „das eigenthümliche System jener Grösse;“ seine Stufenzahl, das heisst die Stufenzahl des beiden Faktoren gemeinschaftlichen Systems*), können wir als Stufenzahl der Grösse selbst auffassen. Erst

---

*) Ist die Produktgrösse also von geltendem Werthe (und nur in diesem Falle lässt sich von einer Stufenzahl derselben reden) so ist die Stufenzahl der Produktgrösse gleich der Stufe der eingewandten Multiplikation.

bei dieser Betrachtungsweise tritt der Werth des eingewandten Produktes in seiner ganzen Einfachheit hervor.

§ 133. **Einführung der Ergänzzahlen.**

Aus dem im vorhergehenden Paragraphen aufgestellten Begriffe 195
des eingewandten Produktes können wir nun das | Vertauschungsgesetz 196
ableiten.

Betrachten wir nämlich zwei Produkte von geltendem Werthe,

$$AB \,.\, AC \text{ und } AC \,.\, AB,$$

in welchen der Punkt die eingewandte Multiplikation, das unmittelbare Zusammenschreiben die äussere Multiplikation andeuten soll, und in welchen der Faktor A das gemeinschaftliche System, ABC oder ACB also das nächstumfassende System oder das Beziehungssystem darstellt, so hat man nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$AB \,.\, AC = ABC \,.\, A,$$
$$AC \,.\, AB = ACB \,.\, A.$$

Beide Produkte sind also einander gleich oder entgegengesetzt, je nachdem ABC und ACB es sind, das heisst, je nachdem die äusseren Faktoren B und C sich ohne oder mit Zeichenwechsel vertauschen lassen. Nun hat man bei der Vertauschung zweier äusseren Faktoren, welche auf einander folgen (nach § 55), nur dann (aber auch stets dann) das Vorzeichen zu ändern, wenn die Stufenzahlen beider Faktoren ungerade sind. Man wird also auch die Faktoren jenes eingewandten Produktes mit oder ohne Zeichenwechsel vertauschen können, je nachdem die Stufenzahlen von B und C beide zugleich ungerade sind oder nicht. Die Stufenzahlen von B und C ergänzen aber die der eingewandten Faktoren AC und AB zu der Stufenzahl des Beziehungssystemes ABC. Nennen wir daher diejenige Zahl, welche die Stufenzahl einer Grösse zu der des Beziehungssystemes ergänzt, die *Ergänzzahl* jener Grösse (in Bezug auf jenes System), so haben wir das Gesetz:

Die beiden Faktoren eines eingewandten Produktes lassen sich mit oder ohne Zeichenwechsel vertauschen, je nachdem die Ergänzzahlen der Faktoren beide zugleich ungerade sind oder nicht.

Hierin liegt zugleich, dass ein Faktor, welcher das Beziehungssystem darstellt, sich ohne Zeichenänderung vertauschen lässt, da seine Ergänzzahl null, also gerade ist. — Es entspricht dies Gesetz dem in § 55 für die äussere Multiplikation aufgestellten, womit noch der Satz in § 68 über die willkührliche Stellung der Zahlengrösse zu vergleichen ist.

196 Da hier die Ergänzzahlen in die Stelle | der dort vorkommenden Stufenzahlen eintreten, so erscheint es überhaupt als zweckmässig,
197 auch für die übrigen Sätze der äusseren | Multiplikation, welche sich auf die Stufenzahlen beziehen, hier die entsprechenden aufzusuchen, was natürlich hier nur geschehen kann in Bezug auf Produkte aus zwei Faktoren.

Es war die Stufenzahl eines äusseren Produktes von geltendem Werthe die Summe aus den Stufenzahlen seiner Faktoren. Bei der eingewandten Multiplikation ist die Stufenzahl des beiden Faktoren gemeinschaftlichen Systems (nach § 132) als die Stufenzahl der Produktgrösse, wenn diese einen geltenden Werth hat, aufgefasst. Sind a und b die Stufenzahlen der Faktoren, und h die des Beziehungssystems, was hier zugleich das nächstumfassende System ist, so ist die des gemeinschaftlichen Systems (g) nach § 126 gleich $a + b - h$. Um hier die Ergänzzahlen einzuführen, kann man der Gleichung folgende Gestalt geben

$$h - g = h - a + h - b,$$

oder, wenn man die Ergänzzahlen mit a', b', g' bezeichnet,

$$g' = a' + b',$$

das heisst, die Ergänzzahl eines eingewandten Produktes von geltendem Werthe ist die Summe aus den Ergänzzahlen seiner beiden Faktoren.

Es bleibt uns noch der Fall, wo das Produkt null ist, zu berücksichtigen. Bei der eingewandten Multiplikation trat dieser Fall (nach § 125) dann ein, wenn das beiden Faktoren gemeinschaftliche System von höherer Stufe war, als die Stufe der eingewandten Multiplikation, das heisst $a + b - h$, betrug, also wenn

$$g > a + b - h,$$

das heisst

$$h - a + h - b > h - g,$$

oder wenn

$$a' + b' > g',$$

und ausserdem nur noch, wenn einer der Faktoren null war, das heisst, *ein eingewandtes Produkt zweier geltenden Werthe ist null, wenn die Ergänzzahlen beider Faktoren zusammengenommen grösser sind, als die Ergänzzahl des beiden Faktoren gemeinschaftlichen Systems.* Ein äusseres Produkt zweier geltenden Werthe hingegen erschien als null, wenn die Stufenzahlen der Faktoren zusammengenommen grösser sind, als die des beide Faktoren zunächst umfassenden Systemes.

Es stimmen also diese Gesetze für beide Multiplikationsweisen
197 überein, wenn man den Begriff der Stufenzahl gegen den der Ergänz-

zahl und den des nächstumfassenden Systems gegen den | des gemein- 198
schaftlichen austauscht; eine Beziehung, welche, wie wir sehen werden, bei der weiteren Entwickelung ihre Gültigkeit beibehält.

§ 134. Multiplikation von Produkten, die in der Form der Unterordnung erscheinen.

Das Produkt von drei und mehr Faktoren, zu welchem wir nun übergehen, kann stets auf das von zwei Faktoren zurückgeführt werden, wenn nur die Multiplikation zweier Faktoren auch für den Fall feststeht, dass diese Faktoren wieder Produkte sind. Da nun, wenn die Faktoren wieder eingewandte Produkte sind, der Sinn ihrer Multiplikation noch nicht festgestellt ist, so bedürfen wir hier einer neuen Definition; und zwar müssen wir festsetzen, welche Bedeutung eine beliebige Produktgrösse als erster Faktor, und welche sie als zweiter Faktor habe.

Wenn eine Grösse als zweiter Faktor auftritt, so wollen wir sagen, es werde mit ihr multiplicirt, wenn als erster, sie selbst werde multiplicirt. Ich setze nun fest, „mit einer Produktgrösse, welche auf die Form der Unterordnung gebracht, das heisst, so dargestellt ist, dass jeder folgende Faktor dem vorhergehenden untergeordnet sei, multipliciren, heisse mit ihren Faktoren fortschreitend*) multipliciren," und ferner „eine Produktgrösse, welche auf die Form der Unterordnung gebracht ist, mit irgend einer Grösse multipliciren, heisse den letzten Faktor der ersteren mit der letzteren multipliciren (ohne die früheren Faktoren zu ändern)". Hierbei muss dann natürlich, damit der Sinn der gesammten Multiplikation klar sei, die Stufe für eine jede der einzelnen Multiplikationen, auf welche jene Eine reducirt wird, bestimmt sein.

Dass diese Definitionen für jedes reale Produkt ausreichen, werde ich sogleich zeigen. Das Produkt wird nämlich als ein reales von geltendem Werthe erscheinen, wenn bei den einzelnen Multiplikationen die Stufe der eingewandten Multiplikation mit dem Grade der Abhängigkeit übereinstimmt; hingegen wird es null werden, wenn der Grad der Abhängigkeit bei irgend einer dieser Multiplikationen die
Stufe der Multiplikation | übersteigt, indem dadurch dann einer der 198
Faktoren null wird. Bloss formale Bedeutung wird es haben, wenn
der Grad der Abhängigkeit irgendwo | geringer ist, als die Stufe der 199

*) Fortschreitend mit einer Reihe von Grössen verknüpfen, heisst nach dem schon früher eingeführten Sprachgebrauche, so verknüpfen, dass das jedesmalige Ergebniss der Verknüpfung mit der nächstfolgenden Grösse der Reihe verknüpft wird.

zugehörigen Multiplikation, ohne dass anderswo das entgegengesetzte Verhältniss eintritt.

§ 135. Jedes reale Produkt lässt sich auf die Form der Unterordnung bringen.

Der Nachweis dafür, dass die aufgestellten Definitionen für das reale Produkt ausreichen, fällt zusammen mit dem Beweise des Satzes, dass jedes reale Produkt sich auf die Form der Unterordnung bringen lasse.

In der That lässt sich nach § 132 zunächst das Produkt zweier reiner Faktoren (so können wir solche Faktoren nennen, die nicht wieder als eingewandte Produkte erscheinen) auf die Form der Unterordnung bringen. Kommt nun zu einem solchen Produkt $A.B$, wo B dem A untergeordnet sei, ein dritter reiner Faktor hinzu, welcher mit B im c-ten Grade der Abhängigkeit steht, mit A im $(c+d)$-ten, während seine eigne Stufenzahl $c+d+e$ beträgt, so wird er sich darstellen lassen in der Form CDE, wo C dem B (also auch dem A) untergeordnet ist, und CD dem A, während sonst keine Abhängigkeit stattfindet, vorausgesetzt nämlich, dass c, d, e die Stufenzahlen von C, D, E sind. Ist dann das Produkt ein reales von geltendem Werthe, das heisst, stimmt die Stufe der Multiplikation mit dem Grade der Abhängigkeit überein, so lässt sich zeigen, dass

$$A.B.CDE = AE.BD.C$$

sei.

In der That, da hier die Produktgrösse $A.B$ in der Form der Unterordnung erscheint, so wird sie mit einer andern Grösse CDE multiplicirt, indem man den letzten Faktor mit derselben multiplicirt; also ist

$$A.B.CDE = A.(B.CDE).$$

Es ist aber $B.CDE$, da C dem B untergeordnet, und c der Grad der Multiplikation ist, gleich $BDE.C$ (nach § 132), also jenes Produkt

$$= A.(BDE.C).$$

Da hier C dem B, also auch dem BDE untergeordnet ist, so multiplicirt man nach dem ersten Theil der Definition (§ 134) mit $BDE.C$, indem man zuerst mit BDE und das Ergebniss dieser Multiplikation mit C multiplicirt. Nun ist aber $A.BDE$, da B und D, also auch
199 BD, dem A untergeordnet sind, und $(b+d)$ den Grad | der Multiplikation darstellt, gleich $AE.BD$; also ist der obige Ausdruck

$$= AE.BD.C.$$

200 Dieser Ausdruck hat die Form der Unterordnung, da C dem B,

also auch dem BD, BD aber dem A, also auch dem AE untergeordnet ist.

Somit lässt sich das fortschreitende Produkt von drei reinen Faktoren stets auf die Form der Unterordnung bringen.

Kommt nun noch ein vierter Faktor hinzu, so kann man zuerst die drei ersten auf die Form der Unterordnung bringen. Es sei $A.B.C$ diese Form. Tritt nun ein vierter Faktor hinzu, so muss, damit der Sinn der Multiplikation ein bestimmter sei, festgesetzt sein, in welchem Grade der Abhängigkeit er mit jeder der drei Grössen A, B, C stehen muss, wenn das Produkt einen realen geltenden Werth haben soll; es möge dann der vierte Faktor von C im d-ten Grade abhängig sein, von B im $(d+e)$-ten, von A im $(d+e+f)$-ten Grade, während er selbst zur Stufenzahl $d+e+f+g$ habe, so wird er sich in der Form $DEFG$ darstellen lassen, wo D dem C, E dem B, F dem A untergeordnet ist, und d, e, f, g die Stufenzahlen von D, E, F, G darstellen. Dann kann man zeigen, dass

$$A.B.C.DEFG = AG.BF.CE.D$$

sei. Denn es ist

$$\begin{aligned} A.B.C.DEFG &= A.B.(C.DEFG) \\ &= A.B.(CEFG.D), \end{aligned}$$

da nämlich D dem C untergeordnet ist. Da nun $CEFG.D$ in der Form der Unterordnung erscheint, so kann man mit seinen einzelnen Faktoren $CEFG$ und D fortschreitend multipliciren; B giebt aber mit $CEFG$ multiplicirt, da C und E, also auch CE dem B untergeordnet sind, den Ausdruck $BFG.CE$. Man erhält also den obigen Ausdruck

$$\begin{aligned} &= A.(BFG.CE).D \\ &= A.BFG.CE.D \\ &= AG.BF.CE.D, \end{aligned}$$

da nämlich B und F, also auch BF, dem A untergeordnet sind.

Also erscheint auch das fortschreitende Produkt aus vier reinen Faktoren in der Form der Unterordnung, und es lässt sich schon übersehen, wie ganz auf dieselbe Weise folgt, dass überhaupt ein fortschreitendes | Produkt aus beliebig vielen reinen Faktoren sich auf die 200
Form der Unterordnung bringen lässt. Ist nun aber dies der Fall, so wird, da nach den Definitionen sich die Multiplikation überhaupt | auf 201
die fortschreitende Multiplikation reiner Grössen zurückführen lässt, dasselbe auch von beliebigen realen Produkten gelten, nämlich dass

jedes reale Produkt sich in Form der Unterordnung darstellen lässt.

Es reichen daher in der That die obigen Definitionen für das reale Produkt aus, und die Form der Unterordnung, als die einfachste, auf die sich das reale Produkt bringen lässt, bestimmt die Bedeutung desselben.

§ 136. **Multiplikation mit einander eingeordneten Grössen.**

Es entsteht uns nun die Aufgabe, die verschiedenen Umgestaltungen, welche nach der bis hierher geführten Darstellung das eingewandte Produkt zulässt, in ein einfaches Hauptgesetz zusammenzufassen, auf welches wir dann in der Folge stets zurückgehen können, wenn es sich um solche Umgestaltungen handelt.

Wir brauchen, um dazu zu gelangen, nur die im vorigen Paragraphen entwickelten Umgestaltungen weiter fortzuführen und in Worte zu kleiden. Es ergab sich dort, dass

$$A\,.\,B\,.\,CDE = AE\,.\,BD\,.\,C$$

sei, wenn B dem A untergeordnet ist, C das System darstellt, was CDE mit B, also auch mit A gemeinschaftlich hat, und CD das System darstellt, was CDE mit A gemeinschaftlich hat, und überdies die Art der Multiplikation so angenommen ist, dass sie unter diesen Voraussetzungen einen geltenden realen Werth liefert. Unter denselben Voraussetzungen ergiebt sich nämlich auch

$$EDC\,.\,B\,.\,A = EA\,.\,DB\,.\,C.$$

Denn

$$EDC\,.\,B\,.\,A = (EDC\,.\,B)\,.\,A$$
$$= (EDB\,.\,C)\,.\,A;$$

und da $EDB\,.\,C$ in der Form der Unterordnung erscheint, so multiplicirt man es (nach § 134) mit A, indem man C mit A multiplicirt; da C dem A untergeordnet ist, so ist hier nach § 133 die Ordnung gleichgültig; man erhält also den zuletzt gefundenen Ausdruck

$$= EDB\,.\,(A\,.\,C);$$

201 da wieder $A\,.\,C$ auf die Form der Unterordnung gebracht ist, so | kann man hier mit A und C fortschreitend multipliciren, und erhält den letzten Ausdruck

202 $$= EA\,.\,DB\,.\,C.$$

Auf dieselbe Form nun führt der Ausdruck

$$EDC\,.\,A\,.\,B \quad \text{oder} \quad EDC\,.\,(A\,.\,B)$$

zurück; nämlich da $EDC\,.\,A$ gleich $EA\,.\,DC$ ist, so hat man jenen Ausdruck

$$EDC\,.\,A\,.\,B = EA\,.\,DC\,.\,B$$
$$= EA\,.\,DB\,.\,C.$$

Daraus folgt also, dass man in einem Produkte von realem geltenden Werthe mit zwei einander eingeordneten*) Faktoren fortschreitend in beliebiger Ordnung multipliciren, oder auch mit ihrem Produkte auf einmal multipliciren darf.

Wenn c, d, e die Stufenzahlen von C, D, E sind, so ist hier angenommen (s. den vorigen Paragraphen), dass EDC von A im $(c+d)$-ten Grade, von B im c-ten Grade abhänge, und da in beiden Produkten

$$EDC \,.\, A \,.\, B \text{ und } EDC \,.\, B \,.\, A$$

die Multiplikationsweise als eine reale von geltendem Werthe angenommen ist, wenn der soeben bezeichnete Grad der Abhängigkeit stattfindet, so wird jedes von beiden Produkten dann aber auch nur dann null werden, wenn der Grad der Abhängigkeit wächst, also wird, wenn eins dieser Produkte null wird, auch das andere null werden müssen. Somit bleibt das angeführte Gesetz auch bestehen, wenn das Produkt nur als ein reales aufgefasst ist, und da es sich von zwei einander eingeordneten Faktoren unmittelbar auf mehrere übertragen lässt, so haben wir den Satz:

Statt mit einem Produkte von einander eingeordneten Faktoren zu multipliciren, kann man mit den einzelnen Faktoren fortschreitend multipliciren und zwar in beliebiger Ordnung.

Hierbei haben wir die Multiplikationsweisen so angenommen, dass das Produkt bei demselben Abhängigkeitsverhältniss in allen diesen Formen gleichzeitig als real erscheint. Dies Gesetz drückt somit eine Erweiterung des ersten Theils der Definition (§ 134) aus, dass man, statt mit einem Produkt, welches in Form der | Unterordnung erscheint, 202
mit den Faktoren desselben fortschreitend multipliciren darf. Das Gesetz, was den zweiten Theil der Definition | (§ 134) verallgemeinert, näm- 203
lich, dass man ein Produkt aus einander eingeordneten Faktoren mit einer Grösse multiplicirt, indem man den letzten Faktor mit derselben multiplicirt, ergiebt sich leicht auf ähnliche Weise wie das obige Gesetz, ist aber von geringerer Bedeutung. Uebrigens ist klar, dass in dem obigen Gesetz zugleich das Gesetz über den mittleren Faktor in § 132 liegt; nämlich

$$BA \,.\, AC = BAC \,.\, A,$$

indem man, statt B fortschreitend mit A und dem ihm übergeordneten AC zu multipliciren, auch in umgekehrter Folge multipliciren darf.

---

*) Einander eingeordnete Grössen nennen wir solche, von denen die eine der andern untergeordnet ist.

§ 137. Eigenthümlicher Werth eines eingewandten Produktes aus mehreren Faktoren. Reines und gemischtes Produkt.

Wir verlassen den allgemeinen Begriff des eingewandten Produktes und beschränken die Betrachtung auf den Fall, dass die Multiplikation sich stets auf dasselbe Hauptsystem beziehe. Da nun ein jedes solches Produkt nach § 132, wenn es auf die Form der Unterordnung gebracht ist, als ersten Faktor entweder nothwendig eine das Hauptsystem darstellende Grösse hat, oder doch in dieser Form dargestellt werden kann, so folgt, dass, wenn man auf ein Produkt aus mehreren Faktoren, welches sich auf dasselbe Hauptsystem bezieht, das in § 135 mitgetheilte Verfahren anwendet, das Produkt sich auf die Form bringen lässt, dass alle Faktoren mit Ausnahme des letzten das Hauptsystem darstellen.*)

Bringen wir alle jene vorangehenden Faktoren, welche das Hauptsystem darstellen, durch Anwendung der allgemeinen multiplikativen Formänderung auf denselben Grössenwerth, und fassen diesen Werth als Hauptmass auf, so können wir dann den letzten Faktor, wie es in § 132 schon in Bezug auf zwei Faktoren festgestellt ist, „den eigenthümlichen (specifischen) Werth oder Faktor jener Produktgrösse
203 in Bezug auf dies | Hauptmass" und das System desselben „das eigenthümliche System" der Produktgrösse nennen, und die Stufenzahl
204 dieses Systems als Stufenzahl jener Produktgrösse selbst auffassen.
Wir können ferner die Grössen, welche durch eingewandte Multiplikation reiner Grössen (s. § 135) hervorgehen, *Beziehungsgrössen* nennen, weil sie nur in ihrer Beziehung auf ein System oder ein Mass eine einfache Bedeutung gewinnen. Als eigenthümlicher Werth einer reinen Grösse erscheint natürlich diese Grösse selbst.

Es gilt hier auch noch das, was wir in § 128 über die Bezeichnung der Multiplikation bei zwei Faktoren sagten, dass es nämlich, wenn einmal das Hauptsystem als Beziehungssystem feststehe, als überflüssig erscheine, die äussere Multiplikation von der eingewandten oder die verschiedenen Grade der letzteren durch die Bezeichnung zu unter-

---

*) Es sei zum Beispiel $H.A.B$ dies Produkt, in welchem H das Hauptsystem darstelle, indem nämlich das Produkt der beiden ersten Faktoren schon auf die verlangte Form gebracht ist; nun sei $B = CD$, wo im Falle, dass das ganze Produkt geltenden Werth habe, AD das Hauptsystem darstelle. Dann ist jenes ganze Produkt gleich $H.AD.C$, was die verlangte Form hat. Ist das ganze Produkt null, so kann man die ersten Faktoren beliebig setzen, wenn nur der letzte null ist; also kann auch dann das Produkt auf die verlangte Form gebracht werden.

scheiden.*) Dagegen tritt hier ein neuer Unterschied hervor, nämlich der zwischen reinen und gemischten Produkten.

Nämlich reine Produkte nenne ich solche, deren Faktoren fortschreitend stets durch dieselbe Art der Multiplikation verknüpft sind, das heisst, entweder nur durch äussere Multiplikation (äussere Produkte), oder nur durch eingewandte auf ein und dasselbe System bezügliche (reine eingewandte Produkte); gemischte hingegen nenne ich solche, deren Faktoren fortschreitend entweder durch beiderlei Arten der Multiplikation (äussere und eingewandte) verknüpft sind, oder zwar bloss durch eingewandte aber auf verschiedene Systeme bezügliche.

Da die reinen und die gemischten Produkte verschiedenen Gesetzen unterliegen, so ist ihre Unterscheidung sehr wichtig; und obgleich eine Unterscheidung durch die Bezeichnung nicht nothwendig ist, indem durch die Stufenzahlen der Faktoren, wenn das Hauptsystem als Beziehungssystem feststeht, auch schon immer bestimmt ist, ob das Produkt ein reines oder gemischtes sei, so erscheint eine solche Unterscheidung doch in vielen | Fällen als sehr bequem. *Ich will mich* 204
daher in solchen | Fällen der Punkte bedienen, um durch sie die Faktoren 205
des reinen Produktes von einander abzusondern, und will daher festsetzen, dass, wo Punkte zur Bezeichnung der Multiplikation angewandt werden, dann auch stets, wenn sie gar keiner oder derselben Klammer eingeordnet sind, durch sie Faktoren eines reinen Produktes von einander abgesondert werden, wobei dann ein Produkt von unmittelbar zusammengeschriebenen Grössen in Bezug auf diese Punkte jedesmal als Ein Faktor erscheint; zum Beispiel bedeutet $AB\,.\,CD\,.\,EF$ ein reines Produkt, dessen Faktoren AB, CD, EF sind.

§ 138. Gesetz für die Ergänzzahlen reiner Produkte.

Wir können nun die in § 133 für zwei Faktoren erwiesenen Sätze auch auf mehrere Faktoren übertragen.

Zuerst was die Vertauschung betrifft, so zeigt sich, dass auch bei mehreren Faktoren die Stellung eines Faktors, der das Beziehungssystem darstellt, ganz gleichgültig ist; und daraus folgt dann über-

*) Ganz anders würde dies bei der allgemeinen realen Multiplikation sein, indem bei ihr die verschiedenen Grade der Abhängigkeit zwischen den einzelnen Faktoren festgestellt werden müssten, bei denen das Produkt noch einen geltenden Werth hätte. Das Produkt aus mehreren Faktoren würde dann seiner Art nach durch eine Reihe von Zahlen bestimmt sein, welche jene Abhängigkeitsgrade darstellten; diese Bestimmung würde also eine zusammengesetzte sein und nicht mehr einen einfachen Begriff darstellen. Und dies ist der Grund, weshalb wir diesen allgemeinen Fall hier übergangen haben.

haupt, dass man, um zwei Produktgrössen zu multipliciren, nur ihre eigenthümlichen Werthe in Bezug auf irgend ein Hauptmass zu multipliciren, und diesem Produkte das Hauptmass so oft als Faktor hinzuzufügen hat, als es in beiden Grössen zusammengenommen als Faktor vorkommt; zum Beispiel ist $H^m A \,.\, H^n B$, wo H das Hauptmass darstellt, gleich $H^m H^n A \,.\, B$ oder gleich $H^{m+n} A \,.\, B$. Hierin liegt dann, dass zwei Produktgrössen, welche als Faktoren zusammentreten, gleichfalls mit oder ohne Zeichenwechsel vertauschbar sind, je nachdem ihre Ergänzzahlen beide zugleich ungerade sind oder nicht.

Die folgenden Sätze jenes Paragraphen können wir nur auf reine eingewandte Produkte übertragen. Da nämlich bei zwei Faktoren eines eingewandten Produktes von geltendem Werthe die Ergänzzahl des Produktes die Summe ist aus den Ergänzzahlen der Faktoren, so bleibt dies Gesetz bestehen, wenn zu diesem eingewandten Produkte wieder ein eingewandter Faktor hinzutritt und das Produkt wieder geltenden Werth behält; es ist dann die Ergänzzahl des Gesammtproduktes, wie sogleich durch zweimalige Anwendung des für zwei Faktoren bewiesenen Gesetzes einleuchtet, die Summe aus den Ergänzzahlen der Faktoren, und so fort für beliebig viele Faktoren. Da überdies das Produkt zweier Faktoren dann und nur dann als ein eingewandtes erscheint, wenn die Summe der beiden Stufenzahlen grösser, das heisst, die Summe
205 der Ergänzzahlen kleiner ist als die Stufenzahl des Hauptsystems, so
206 wird auch | das geltende Produkt aus drei und mehr Faktoren dann
und nur dann als ein reines eingewandtes erscheinen, wenn die Summe der Ergänzzahlen stets kleiner bleibt als die Stufenzahl des Hauptsystems, das heisst, wenn die Summe aller Ergänzzahlen der Faktoren noch kleiner bleibt als die Stufenzahl des Hauptsystems.

Um endlich auch den Satz aus § 133 über das Nullwerden hier zu übertragen, erinnern wir daran, dass die Summe der Ergänzzahlen zweier Grössen, welche das Beziehungssystem als nächstumfassendes System haben und also als Produkt einen geltenden Werth darbieten, gleich der Ergänzzahl ihres gemeinschaftlichen Systemes ist; dass aber, wenn das nächstumfassende System niedriger ist als das Beziehungssystem, und das Produkt also null ist, die Stufenzahl des gemeinschaftlichen Systems grösser, seine Ergänzzahl also kleiner wird als die Summe der zu den Faktoren gehörigen Ergänzzahlen. Tritt nun ein Faktor hinzu, so ist das gemeinschaftliche System aller Faktoren dasjenige, was der hinzutretende Faktor mit dem allen vorhergehenden Faktoren gemeinschaftlichen Systeme selbst wieder gemeinschaftlich hat. Es wird also, sobald das gesammte Produkt geltenden Werth behält, die Summe aller Ergänzzahlen gleich der Ergänzzahl des den sämmtlichen Faktoren gemeinschaftlichen Systemes sein; wenn aber durch irgend einen Faktor, welcher hinzutritt, das Produkt null wird, ohne dass der hinzutretende Faktor selbst null ist, so wird dort die Ergänzzahl des gemeinschaftlichen Systemes kleiner werden, und somit auch, wenn noch neue Faktoren hinzutreten, kleiner bleiben als die jedesmalige Summe aus den Ergänzzahlen der Faktoren. Es wird also ein reines eingewandtes Produkt, dessen Faktoren geltende Werthe haben, dann und nur dann null werden, wenn die Ergänzzahl des allen Faktoren gemeinschaftlichen Systems kleiner ist als die Summe der Ergänzzahlen der Faktoren. Auch liegt in der Art der Beweisführung, dass der eigenthümliche Werth eines solchen Produktes, wenn es nicht null ist, das den sämmtlichen Faktoren gemeinschaftliche System darstellt.

Fassen wir nun die über die Ergänzzahlen aufgestellten Gesetze zusammen und schliessen die entsprechenden Gesetze über die Stufenzahlen äusserer Produkte mit hinein, so erhalten wir den Satz:

Ein Produkt aus beliebig vielen Faktoren von geltenden | Werthen 207
ist ein reines, wenn entweder die Stufenzahlen oder die | Ergänzzahlen 206
der Faktoren zusammengenommen kleiner sind als die Stufenzahl des Hauptsystems, und zwar im ersteren Falle ein äusseres, im letzteren ein eingewandtes, hingegen ein gemischtes, wenn keins von beiden der Fall ist. Das reine Produkt ist null im ersten Falle, wenn die Stufenzahlen der Faktoren zusammengenommen grösser sind als die Stufenzahl des die Faktoren zunächst umfassenden Systemes, im letzteren, wenn die Ergänzzahlen der Faktoren zusammengenommen grösser sind als die Ergänzzahl des den Faktoren gemeinschaftlichen Systemes. Wenn das reine Produkt einen geltenden Werth hat, so stellt der eigenthümliche Werth desselben im ersten Falle das nächstumfassende, im letzteren das gemeinschaftliche System dar; und im ersteren Falle ist die Stufenzahl desselben die Summe aus den Stufenzahlen der Faktoren, im letzteren ist seine Ergänzzahl die Summe aus den Ergänzzahlen der Faktoren.

§ 139. **Die Faktoren eines reinen Produktes lassen sich beliebig zusammenfassen.**

Wir schreiten nun zu dem multiplikativen Zusammenfassungsgesetz, das heisst, wir untersuchen, ob und in welchem Umfange

$$PQR = P(QR)$$

gesetzt werden könne. Schon aus dem Satze in § 136 geht hervor, dass für das gemischte Produkt dreier Faktoren jenes Gesetz im Allgemeinen nicht gelte*); hingegen wollen wir zeigen, dass dasselbe für das reine Produkt im allgemeinsten Sinne gelte, dass also nach der in § 137 eingeführten Bezeichnung allemal

$$P \, . \, Q \, . \, R = P \, . \, (Q \, . \, R)$$

sei.

Zunächst leuchtet ein, dass, wenn die Gültigkeit dieses Gesetzes nachgewiesen ist für den Fall, dass P, Q, R reine Grössen sind, sie damit auch zugleich für den Fall, dass dieselben sämmtlich oder zum
208 Theil Beziehungsgrössen sind, nachgewiesen sei. | Denn nach dem vorigen Paragraphen hat man Beziehungsgrössen so mit einander zu multipliciren, dass man ihre eigenthümlichen Werthe in Bezug auf ein
207 und dasselbe Hauptmass mit einander | multiplicirt und dem Produkte, gleichviel auf welcher Stelle, so oft das Hauptmass als Faktor hinzufügt, als es in beiden Grössen zusammen als Faktor enthalten war. Da man hiernach also in einem Produkte überhaupt jeden Faktor, der das Hauptmass darstellt, auf eine beliebige Stelle setzen und beliebig aus einer Klammer heraus oder in eine solche hineinrücken kann, so folgt, dass jenes Gesetz, wenn es für reine Grössen gilt, auch für Beziehungsgrössen, also allgemein gelte. Nun gilt es zunächst nach den Gesetzen der äusseren Multiplikation für äussere Produkte reiner Grössen, also auch für äussere Produkte überhaupt. Es bleibt also nur zu beweisen übrig, dass es auch für das reine eingewandte Produkt reiner Grössen gelte.

In diesem Falle kommt es darauf an, zu zeigen, dass P, Q, R, wenn das eingewandte Produkt einen geltenden Werth hat, sich in den Formen ABC, ABD, ADC darstellen lassen, so dass zugleich $ABCD$ das Hauptsystem darstellt.

Es seien die Ergänzzahlen der Grössen P, Q, R beziehlich d, c, b, so ist die Ergänzzahl des Produktes oder des den drei Faktoren gemeinschaftlichen Systemes A nach § 138 (am Schlusse) gleich der Summe jener Zahlen, also gleich $b + c + d$; und ist also a die Stufenzahl jenes gemeinschaftlichen Systemes, so ist die des Hauptsystemes gleich $a + b + c + d$. Zwei der Faktoren, zum Beispiel P und Q, werden nach demselben Satze ein System gemeinschaftlich haben, dessen Ergänzzahl die Summe ist aus den Ergänzzahlen jener Faktoren, also hier gleich $c + d$ ist; also ist die Stufenzahl dieses gemeinschaftlichen Systemes gleich $a + b$, es wird somit dies System durch ein Produkt

*) Allerdings können Fälle aufgeführt werden, in welchen vermittelst des Satzes in § 136 unser Gesetz auch dann noch seine Anwendung findet; allein diese Fälle sind so vereinzelt, die Bedingungen, unter denen sie eintreten, so zusammengesetzt, dass aus ihrer Aufzählung der Wissenschaft kein Vortheil erwächst.

AB dargestellt werden können, in welchem B von b-ter Stufe und von A unabhängig ist. Ebenso wird das dem P und R gemeinschaftliche System von $(a+c)$-ter Stufe sein, und also eine von A unabhängige Grösse c-ter Stufe C in sich fassen. Und zwar muss dann C von AB unabhängig sein; denn wäre es davon abhängig, das heisst, hätte C mit AB irgend eine Grösse gemeinschaftlich, so würden die drei Faktoren P, Q, R diese Grösse, also eine von A unabhängige Grösse, gemeinschaftlich enthalten, was mit der Annahme streitet.

Somit sind nun der Grösse P drei | von einander unabhängige 209
Grössen A, B, C untergeordnet, also auch ihr Produkt ABC. Es muss sich daher P als Produkt darstellen lassen, dessen einer Faktor ABC ist; da P aber selbst von $(a+b+c)$-ter Stufe ist, so wird der andere Faktor, den P | ausser ABC enthält, von nullter Stufe, 208
das heisst, eine blosse Zahlengrösse sein, also P sich als Vielfaches von ABC darstellen lassen. Q und R endlich werden aus demselben Grunde einen von A unabhängigen Faktor D gemeinschaftlich haben, und so werden sich die Grössen P, Q, R beziehlich als Vielfache von ABC, ABD und ADC darstellen lassen; ja, da für die Grössen A, B, C, D nur die Systeme, welche durch sie dargestellt werden, bestimmt sind, sie selbst also beliebig gross angenommen werden können, so wird man dieselben, wie leicht zu sehen ist, auch so annehmen können, dass die Grössen P, Q, R jenen Werthen selbst gleich sind, also

$$P . Q . R = ABC . ABD . ADC$$

ist. Da das ganze Produkt, wie wir voraussetzten, einen geltenden Werth haben soll, also auch zum Beispiel das Produkt $ABC . ABD$, so muss hier das nächstumfassende System, also $ABCD$, zugleich das Beziehungssystem sein. Es ist daher dies Produkt gleich $ABCD . AB$; also der ganze Ausdruck

$$= ABCD . AB . ADC$$
$$= ABCD . ABDC . A.$$

Auf dieselbe Form nun lässt sich das andere Produkt $P . (Q . R)$ bringen; denn $Q . R$ oder $ABD . ADC$ ist gleich $ABDC . AD$, also

$$P . (Q . R) = ABC . (ABDC . AD).$$

Da nun $ABDC$ das Hauptsystem darstellt, so können wir nach § 138 die eigenthümlichen Werthe unter sich multipliciren und $ABDC$ als Faktor hinzufügen. Wir erhalten aber $ABC . AD$ gleich $ABCD . A$, also ist der obige Ausdruck

$$= ABCD . ABDC . A.$$

Da also die beiden Produkte $P \,.\, Q \,.\, R$ und $P \,.\, (Q \,.\, R)$ demselben Ausdrucke gleich sind, so sind sie auch unter sich gleich.

Wir nahmen bei dieser Beweisführung an, dass die Produkte einen geltenden Werth hatten. Nun können sie aber auch nur gleichzeitig null werden, weil nach § 138 das Nullwerden dann und nur dann eintritt, wenn das den Faktoren gemeinschaftliche System von höherer Stufe ist, als die [Stufenzahl des Beziehungssystems vermindert um
210 die] Summe der Ergänzzahlen beträgt, und | dies bei beiden Produkten nur gleichzeitig eintreten kann. Also bleibt auch für diesen Fall die Gleichheit beider Produkte bestehen. Das Gesetz gilt daher allge-
209 mein für reine Grössen, also muss es nun auch, wie wir oben sahen, für Beziehungsgrössen gelten, so dass allgemein für die reine Multiplikation überhaupt

$$P \,.\, Q \,.\, R = P \,.\, (Q \,.\, R)$$

ist. Da nun endlich das Zusammenfassungsgesetz, wenn es für drei Faktoren gilt, auch für beliebig viele gelten muss (§ 3), so ergiebt sich der allgemeine Satz:

Die Faktoren eines reinen Produktes lassen sich beliebig zusammenfassen.

§ 140. **Beziehung zur Addition und Subtraktion.**

Für die Addition der Beziehungsgrössen bietet sich das allgemeine multiplikative Beziehungsgesetz als begriffsbestimmend dar. Man hat dann nur beide auf die Form der Unterordnung zu bringen. Auf diese Form gebracht, erscheinen dann beide als summirbar, wenn einestheils das Hauptmass in beiden gleichvielmal als Faktor erscheint, und anderntheils die Grössen selbst eine gleiche Stufenzahl haben; und zwar werden sie dann addirt, indem man die eigenthümlichen Werthe addirt, und der Summe das Hauptmass so oft als Faktor hinzufügt, als es in jedem der Produkte als Faktor enthalten war.*)

Das allgemeine Beziehungsgesetz ist, dass

$$P \,.\, (Q + R) = P \,.\, Q + P \,.\, R,$$

und

$$(Q + R) \,.\, P = Q \,.\, P + R \,.\, P$$

sei. Die Gültigkeit desselben haben wir zunächst nur für den Fall nachzuweisen, dass die Grössen P, Q, R reine sind, indem das Hinzutreten beliebiger Faktoren, die das Hauptmass darstellen, auf welches sich die Grössen beziehen, nichts ändern kann. Wir nehmen daher zuerst an, P, Q, R seien reine Grössen.

---

*) Diese Bestimmung dient eben als Definition, indem wir unter der Summe zweier Beziehungsgrössen die auf die angegebene Weise gebildete Summe verstehen.

Es sei, um die Stücke der Summe

$$P \,.\, Q + P \,.\, R$$

auf die Form der Unterordnung zu bringen, $Q = AB$, wo A dem P untergeordnet ist, PB aber das Hauptsystem darstellt, auf welches 211
sich die Multiplikation bezieht, und gleich H gesetzt werden mag, und ebenso sei $R = CD$, wo C dem P untergeordnet ist und PD das Hauptsystem darstellt. Da hier D beliebig gross angenommen werden kann (indem C dann nur im umgekehrten Verhältnisse wie D geändert 210
werden muss), so kann man es so annehmen, dass

$$PD = PB = H$$

wird. Dann ist

$$P \,.\, Q + P \,.\, R = HA + HC = H(A + C),$$

letzteres nach der Definition.

Auf dieselbe Form nun können wir auch $P \,.\, (Q + R)$ bringen. Nämlich da PD gleich PB ist, so folgt, dass D auch gleich B plus einer von P abhängigen Grösse, die wir K nennen wollen, gesetzt werden könne; somit ist R, was gleich CD gesetzt war, gleich $C(B + K)$, oder gleich $CB + CK$. Also ist

$$P \,.\, (Q + R) = P \,.\, (AB + CB + CK).$$

Da hier K von P abhängig ist, CK also von P in einem höheren Grade abhängt als CB, so kann es mit P kein geltendes Produkt liefern, kann also nach § 125 weggelassen werden. Es ist also der obige Ausdruck

$$\begin{aligned} &= P \,.\, (AB + CB) \\ &= P \,.\, (A + C)\, B. \end{aligned}$$

Da hier A und C, also auch $(A + C)$ dem P untergeordnet sind, PB aber oder H das Hauptsystem darstellt, so ist der letzte Ausdruck wieder

$$= H\,(A + C).$$

Also sind die beiden zu vergleichenden Ausdrücke $P \,.\, (Q + R)$ und $P \,.\, Q + P \,.\, R$ demselben dritten Ausdrucke gleich, also auch beide unter sich gleich.

Kommt nun ferner zu P das Hauptmass mehrmals, etwa m-mal, als Faktor hinzu, und ebenso auch zu Q und R, zu den letzteren aber gleichvielmal, damit sie summirbar bleiben, etwa n-mal, so ist das so gut, als käme H zu jedem von den beiden Ausdrücken $(m + n)$-mal als Faktor hinzu, also bleiben sie gleich, wenn sie es vorher waren. Da nun endlich dasselbe sich auch von den beiden Ausdrücken $(Q + R) \,.\, P$ und $Q \,.\, P + R \,.\, P$ sagen lässt, so folgt, dass das multiplikative Be-

ziehungsgesetz auch für diese neuen Arten der Addition und Multi-
212 plikation ganz allgemein | gilt. Somit gelten nun auch alle Gesetze, die darauf gegründet sind, das heisst:

Alle Gesetze, welche die Beziehung der Multiplikation zur Addition und Subtraktion ausdrücken, gelten noch immer allgemein für jede Art der Addition und Multiplikation, die bisher festgestellt ist.

§ 141. **Division in Bezug auf ein System; Grad der Beziehungsgrösse.**

211 Für die Division*) ergiebt sich sogleich, dass sie nur dann real ist, wenn Divisor und Dividend einander eingeordnet sind, das heisst, wenn entweder der Divisor dem Dividend untergeordnet ist, oder dieser jenem.

Im ersteren Falle ist die Division eine äussere, im letzteren eine eingewandte; wenn daher beide Fälle zugleich eintreten, das heisst, wenn Divisor und Dividend einander gleichartig sind, so kann die Division sowohl als äussere, wie auch als eingewandte aufgefasst werden. Und zwar gelten diese Bestimmungen nicht nur, wenn die zu verknüpfenden Grössen reine Grössen, sondern auch, wenn sie Beziehungsgrössen sind.

In dem letzteren Falle kommt es dann darauf an, dass die eigenthümlichen Werthe in der angegebenen Beziehung stehen, während das Hauptsystem, auf welches sich beide Grössen beziehen, dasselbe ist. Hierbei kann dann der Fall eintreten, dass das Hauptmass im Divisor öfter als im Dividend als Faktor vorkommt; der Quotient erscheint dann als eine reine Grösse, welche mehrmals durch das Hauptmass dividirt ist, oder welche mit einer Potenz des Hauptmasses multiplicirt ist, deren Exponent negativ ist. Wir fassen daher auch diese neue Grösse als Beziehungsgrösse auf, und nennen den Exponenten derjenigen Potenz des Hauptmasses, mit welcher der eigenthümliche Werth einer Beziehungsgrösse durch Multiplikation verbunden ist, den Grad der Beziehungsgrösse. Es ist somit die neue Grösse eine Beziehungsgrösse, deren Grad negativ ist, während der Grad der vorher betrachteten positiv war, und auch die reine Grösse kann nun als Beziehungsgrösse nullten Grades aufgefasst werden.

Hierbei muss ich noch bemerken, dass die Grössen nullter Stufe, und die das Hauptsystem darstellenden Grössen, das heisst die Grössen nullter und h-ter Stufe (wenn h die Stufenzahl des Hauptsystems ist) auf eine zwiefache Weise aufgefasst werden können. Nämlich „eine

*) Vergleiche die Anmerkungen zu Seite 39 und 43. (1877.)

Grösse nullter Stufe und n-ten Grades kann als Grösse h-ter Stufe und $(n-1)$-ten Grades | aufgefasst werden", indem man den eigen- 213
thümlichen Werth jener Grösse, welcher eine blosse Zahlengrösse ist, mit einem der Faktoren, welche das Hauptmass darstellen, multiplicirt denkt und dies Produkt als eigenthümlichen Werth jener Grösse auffasst, wodurch natürlich der Grad derselben um Eins abnimmt. Ebenso kann umgekehrt „jede Grösse h-ter Stufe und n-ten Grades als Grösse 212
nullter Stufe und $(n+1)$-ten Grades aufgefasst werden." Im Allgemeinen wollen wir es vorziehen, eine solche Grösse als Grösse nullter Stufe zu betrachten.

Es kommt uns nun darauf an, die Eindeutigkeit des Quotienten zu untersuchen.

Es sei zu dem Ende A der Dividend, B der Divisor als erster Faktor, C ein Werth des Quotienten, so dass

$$B.C = A$$

ist, und der Quotient in der Form $\frac{A}{B.}$ erscheint. Jeder Werth nun, welcher statt C gesetzt jener Gleichung genügt, wird auch als ein besonderer Werth dieses Quotienten aufgefasst werden können. Jeder solche Werth wird aus dem Werthe C durch Addition erzeugt werden können, und zwar muss dann das zu C hinzuaddirte Stück mit B multiplicirt Null geben, wenn das Produkt gleich A bleiben soll, und jedes solche hinzuaddirte Stück wird auch das Produkt gleich A lassen; nun können wir ein solches Stück, was mit B multiplicirt Null giebt, allgemein mit $\frac{0}{B}$ bezeichnen, und daher sagen, wenn C ein besonderer Werth des Quotienten ist, und B der Divisor, so sei der vollständige Werth des Quotienten gleich

$$C + \frac{0}{B},$$

wie wir dies schon für die äussere Division in § 62 dargethan haben. Doch müssen wir hierbei stets festhalten, dass hier unter $\frac{0}{B}$ zugleich eine mit C addirbare Grösse verstanden sein muss, das heisst eine Grösse, welche mit C von gleicher Stufe und gleichem Grade ist. Es wird also der Quotient eindeutig sein, wenn unter dieser Voraussetzung $\frac{0}{B}$ jedesmal 0 ist, das heisst, es keine andere Grösse dieser Art X giebt, die mit B multiplicirt Null giebt, als Null selbst.

Da das Produkt einer Grösse nullter Stufe, welche selbst nicht 214
null ist, oder einer Grösse, die das Hauptsystem darstellt, jedesmal einen geltenden Werth liefert, wenn der andere Faktor einen geltenden

Werth hat, so folgt, dass wenn B einen geltenden Werth hat und zugleich entweder B selbst oder auch X eine Grösse nullter oder h-ter
213 Stufe ist, | allemal X null sein müsse, wenn $B\,.\,X$ null sein soll. Es wird also auch in diesem Falle der Quotient eindeutig sein; aber auch in keinem andern. Denn wenn beide Grössen B und X von mittlerer Stufe sind, das heisst, wenn ihre Stufenzahlen zwischen 0 und h liegen, so wird X, ohne dass es null wird, stets so angenommen werden können, dass B und X von einander abhängig sind, und ihr nächstumfassendes System doch nicht das Hauptsystem selbst ist; es wird also alsdann nach § 128 einen geltenden Werth für X geben, dessen Produkt mit B Null giebt, das heisst, es wird dann der Quotient nicht eindeutig sein.

Ist der Divisor null, so wird, da Null mit jeder Grösse, die wir bisher kennen gelernt haben, zum Produkte verknüpft Null giebt, auch der Dividend null sein müssen, wenn der Quotient eine der bisher entwickelten Grössen sein soll, und zwar wird dann jede dieser Grössen als ein besonderer Werth des Quotienten aufgefasst werden können. Ist der Dividend aber eine Grösse von geltendem Werthe, während der Divisor null ist, so erscheint der Quotient als eine Grösse von ganz neuer Gattung, die wir als *unendliche* Grösse bezeichnen können, während die bisher betrachteten als *endliche* erschienen.

Fassen wir nun die soeben gewonnenen Ergebnisse zusammen, indem wir zugleich bedenken, dass wenn C von nullter oder h-ter Stufe ist, Dividend und Divisor gleichartig sind, so gelangen wir zu dem Satze:

Der Quotient stellt dann und nur dann einen einzigen, endlichen Werth dar, wenn der Divisor von geltendem Werthe ist, und zugleich entweder selbst als Grösse nullter Stufe dargestellt werden kann), oder dem Dividend gleichartig ist. Sind Dividend und Divisor null, so ist der Quotient jede beliebige endliche Grösse. Ist der Divisor null, der Dividend*
215 *nicht, so ist der Quotient unendlich. In jedem andern Falle, das heisst, wenn der Divisor nicht null ist, und zugleich Divisor und Quotient beide von mittlerer Stufe sind, ist der Quotient nur partiell bestimmt, und zwar erhält man dann aus einem besondern Werthe des Quotienten den allgemeinen, indem man den allgemeinen Ausdruck einer Grösse, die mit dem Divisor multiplicirt Null giebt, hinzuaddirt.*

214 Ein besonderes Interesse gewähren hier noch solche Ausdrücke, deren Dividend die Einheit ist, während der Divisor eine Grösse von

*) Denn auch die Grösse h-ter Stufe kann, wie wir oben sahen, als Grösse nullter Stufe dargestellt werden.

geltender Stufe darstellt, zum Beispiel der Quotient $\frac{1}{ab}$. Ist hier $abcd$ oder H das Hauptmass, so ist

$$\frac{1}{ab} = \frac{1}{H}\left(cd + \frac{0}{ab}\right),$$

wo $\frac{0}{ab}$ jede von ab abhängige Grösse zweiter Stufe darstellt.

§ 142. Vollkommene Analogie zwischen äusserer und eingewandter Multiplikation.

Um die Analogie zwischen der äusseren Multiplikation und der reinen eingewandten Multiplikation zu vollenden, bleibt uns noch eine Betrachtung übrig. Nämlich es liessen sich bei der äusseren Multiplikation alle Grössen höherer Stufen als Produkte der Grössen erster Stufe darstellen, und die Gesetze ihrer Verknüpfung liessen sich aus den Verknüpfungsgesetzen für Grössen erster Stufe auf rein formelle Weise ableiten. Den Grössen erster Stufe entsprechen nach § 138 bei der eingewandten Multiplikation Grössen, deren Ergänzzahl Eins ist, das heisst Grössen $(h-1)$-ter Stufe, wenn das Beziehungssystem für alle Grössen und Produkte dasselbe, und zwar ein System von h-ter Stufe ist. Durch ihre Multiplikation entstehen nach § 138 Grössen, deren Ergänzzahlen die Einheit übertreffen, das heisst also, deren Stufenzahlen kleiner sind als $(h-1)$. Es kommt daher, um die vollständige Analogie nachzuweisen, nur darauf an, die Analogie der Gesetze für diese Grössen erster und $(h-1)$-ter Stufe darzuthun.

Die Identität dieser Gesetze, sofern sie nur die allgemeinen Verknüpfungsgesetze der vier Grundrechnungen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) darstellen, haben wir nachgewiesen. Auch haben wir gezeigt, dass die Gesetze der äusseren Multiplikation als solcher, sobald sie nur auf den Begriff der Stufenzahl und des gemeinschaftlichen Systemes | zurückgehen, auch für die eingewandte, auf ein 216
festes Hauptsystem bezügliche Multiplikation gelten, wenn man statt des Begriffs der Stufenzahl den der Ergänzzahl, und statt des Begriffs des gemeinschaftlichen Systems den des nächstumfassenden einführt, und umgekehrt. Sofern daher der Begriff der Abhängigkeit, auf den alle besonderen Gesetze der äusseren Multiplikation, als auf ihre Wurzel, gegründet sind, durch den des gemeinschaftlichen oder nächstumfassenden Systemes bestimmt ist, werden die | Gesetze der äusseren Multi- 215
plikation sich auch auf die reine eingewandte nach jenem Princip übertragen lassen.

Aber der Begriff der Abhängigkeit, welcher zuerst bei Grössen erster Stufe hervortrat, wurde ursprünglich ganz anders bestimmt, und viele später entwickelten Gesetze gründen sich auf diese ursprüngliche Bestimmung. Nämlich es wurde ursprünglich eine Grösse erster Stufe dann als abhängig von einer Reihe solcher Grössen dargestellt, wenn sich jene als Summe von Stücken ausdrücken lässt, welche diesen gleichartig sind, oder, wie wir es späterhin ausdrückten, wenn sich jene als Vielfachensumme von diesen darstellen lässt; und so nannten wir überhaupt mehrere Grössen erster Stufe von einander abhängig, wenn sich eine derselben als Vielfachensumme der übrigen darstellen lässt, und erst daraus folgte dann vermittelst des ursprünglichen Begriffs des Systemes, dass n Grössen erster Stufe dann und nur dann von einander abhängig sind, wenn sie von einem Systeme von niederer als der n-ten Stufe umfasst werden, und vermittelst des Begriffs der äusseren Multiplikation, dass das Produkt abhängiger Grössen, aber auch nur ein solches, null sei. Wir müssen daher zu jener ursprünglichen Bestimmung auf unserm Gebiete das Analoge suchen.

Wenn zuerst in einem Systeme n-ter Stufe n Grössen erster Stufe gegeben waren, deren äusseres Produkt nicht null ist, so zeigte sich, dass jede andere Grösse erster Stufe, die diesem Systeme angehört, sich als Vielfachensumme jener ersteren darstellen lässt. Der analoge Satz würde hier lauten: *Wenn in einem Systeme n-ter Stufe n Grössen $(n-1)$-ter Stufe gegeben sind, deren eingewandtes auf jenes System bezügliche Produkt nicht null ist, so lässt sich jede andere Grösse $(n-1)$-ter Stufe, welche diesem Systeme angehört, als Vielfachensumme der ersteren darstellen.*

217 Der Beweis dieses Satzes ergiebt | sich aus § 138. Nämlich nach dem angeführten Paragraphen werden je $(n-1)$ von den n Faktoren, welche die im Satze ausgesprochene Beschaffenheit haben, als gemeinschaftliches System ein System erster Stufe haben, während alle n Faktoren kein System von geltender Stufe gemeinschaftlich haben dürfen, wenn das Produkt einen geltenden Werth haben soll. Es wird also im Ganzen n solcher Systeme erster Stufe geben, wovon immer je $(n-1)$ einem der n Faktoren untergeordnet sind. Diese n Systeme erster Stufe müssen aber von einander unabhängig sein; denn wäre
216 eins derselben | von den übrigen $(n-1)$ abhängig, so müsste es in dem durch sie bedingten Systeme liegen (nach dem ursprünglichen Begriffe des Systems); es sind aber diese übrigen einem der n Faktoren untergeordnet, folglich müsste auch jenes erste System diesem Faktor untergeordnet sein; es ist aber jenes erste System das den übrigen $(n-1)$ Faktoren gemeinschaftliche System, folglich würde dies System allen n Faktoren gemeinschaftlich sein, also das Produkt nach § 138 null sein, gegen die Voraussetzung. Es sind also in der That jene n

Systeme erster Stufe von einander unabhängig. Nehmen wir nun n beliebige Grössen erster Stufe an, welche diesen Systemen angehören und also gleichfalls von einander unabhängig sind, so wird zuerst jeder der gegebenen n Faktoren, da ihm $(n-1)$ jener Grössen erster Stufe untergeordnet sind, und er selbst von $(n-1)$-ter Stufe ist, sich als Vielfaches von dem äusseren Produkte jener Grössen darstellen lassen; ferner wird jede Grösse erster Stufe, welche dem Hauptsysteme (n-ter Stufe) angehört, sich als Vielfachensumme jener n Grössen erster Stufe, also auch jede Grösse $(n-1)$-ter Stufe, die jenem Hauptsysteme angehört, sich als äusseres Produkt aus $(n-1)$ solchen Vielfachensummen darstellen lassen. Das Produkt dieser $(n-1)$ Vielfachensummen verwandelt sich aber beim Durchmultipliciren in eine Vielfachensumme von äusseren Produkten zu $(n-1)$ Faktoren aus jenen n Grössen erster Stufe, folglich auch, da diese Produkte den n gegebenen Faktoren gleichartig sind, in eine Vielfachensumme dieser Faktoren.

Wir haben also den oben ausgesprochenen Satz bewiesen. Doch ist damit noch nicht unsere Aufgabe gelöst. Vielmehr beruhte das Wesen der äusseren Multiplikation als äusserer auf dem Satze, dass ein Produkt von Grössen erster Stufe dann | und nur dann null sei, 218
wenn sich eine derselben als Vielfachensumme der übrigen darstellen liess; und ehe wir diesen Satz nicht auf unser Gebiet übertragen haben, ist die Analogie noch nicht vollständig.

Dass ein Produkt von Grössen $(n-1)$-ter Stufe dann allemal null sei, wenn eine derselben als Vielfachensumme der andern darstellbar ist, erhellt sogleich aus dem Gesetze des Durchmultiplicirens, wenn man zugleich festhält, dass das Produkt zweier gleichartiger Grössen $(n-1)$-ter Stufe null ist. Um zu beweisen, dass das Produkt auch nur dann null sei, wenn sich einer der Faktoren als Vielfachensumme der andern darstellen lässt, müssen wir zeigen, | dass, wenn zu einem 217
geltenden Produkt von m Faktoren $(n-1)$-ter Stufe in einem Hauptsysteme n-ter Stufe ein Faktor derselben $(n-1)$-ten Stufe hinzutritt, welcher das Produkt null macht, sich dieser als Vielfachensumme der ersteren darstellen lässt.

Dass ein Produkt aus mehr als n Faktoren dieser Art null wird, liegt schon in dem allgemeinen Satze § 138, ergiebt sich aber auch schon sogleich aus dem vorher bewiesenen Satze. Wenn ferner zu n solchen Faktoren, deren Produkt einen geltenden Werth hat, ein Faktor derselben Stufe hinzukommt, so wird dieser einestheils das Produkt immer null machen, anderntheils sich als Vielfachensumme jener n Faktoren darstellen lassen, wie wir oben zeigten. Es bleibt uns also, um den Beweis unseres Satzes zu führen, nur der Fall zu berücksichtigen übrig, dass die Anzahl der Faktoren (m) kleiner ist als die Stufe des Hauptsystemes (n).

In diesem Falle können wir zur Führung des Beweises $(n - m)$ Faktoren $(n - 1)$-ter Stufe zu Hülfe nehmen, welche mit den gegebenen m Faktoren ein Produkt von geltendem Werthe liefern. Dann wird sich der Faktor $(n - 1)$-ter Stufe, welcher zu dem Produkt der m gegebenen Faktoren (P) hinzutreten und dasselbe null machen soll, nach dem vorher bewiesenen Satze als Vielfachensumme der sämmtlichen n Grössen, deren Produkt geltenden Werth hat, darstellen lassen, das heisst, als Summe, deren eines Stück (A) eine Vielfachensumme der gegebenen m Faktoren, und deren anderes Stück (B) eine Vielfachensumme der zu Hülfe genommenen Faktoren ist, und zu beweisen bleibt, dass dies zweite Stück null sei. Multipliciren wir nun das Produkt der m gegebenen Faktoren (P) mit dieser Summe $(A + B)$, so können
219 wir das erste Stück (A) | weglassen, da es als Vielfachensumme von den ersten m Faktoren erscheint, also mit ihnen multiplicirt Null giebt. Da nun das Produkt jener Summe und der m gegebenen Faktoren Null betragen sollte, also $P . (A + B) = 0$ sein sollte, so folgt jetzt, dass das Produkt ihres zweiten Stückes in die m gegebenen Faktoren auch null sein müsse; also

$$P . B = 0.$$

Dies zweite Stück B ist aber eine Vielfachensumme der zu Hülfe genommenen $(n - m)$ Faktoren; und wir können zeigen, dass die Koefficienten dieser Vielfachensumme sämmtlich Null betragen müssen, sie
218 selbst also null sei. Zu dem Ende multiplicire man, statt mit der Vielfachensumme B, mit ihren Stücken, so erhält man eine Vielfachensumme mit denselben Koefficienten, und zwar enthält jedes Glied ausser den m gegebenen Faktoren einen von den zu Hülfe genommenen. Um nun zu beweisen, dass der Koefficient zu irgend einem solchen Gliede null sei, hat man nur noch mit denjenigen $(n - m - 1)$ von den zu Hülfe genommenen Faktoren, welche diesem Gliede fehlen, beide Seiten der obigen Gleichung, oder vielmehr deren Glieder zu multipliciren; so ist klar, dass dann alle jene Glieder ausser dem Einen wegfallen, und die Gleichung dann aussagt, dass dies Glied, also auch sein Koefficient null sei. Es sind somit sämmtliche Koefficienten der Vielfachensumme B null, also sie selbst null; also [ist] der hinzutretende Faktor, welcher gleich $A + B$ gesetzt war, gleich A, das heisst, eine Vielfachensumme der m gegebenen Faktoren, was wir beweisen wollten. Fassen wir daher die gewonnenen Resultate zusammen, so gelangen wir zu dem Satze:

Ein Produkt von Grössen $(n-1)$-ter Stufe in Bezug auf ein Hauptsystem n-ter Stufe ist dann und nur dann null, wenn sich eine derselben als Vielfachensumme der übrigen darstellen lässt.

Durch dies Gesetz ist nun die Analogie zwischen eingewandter und äusserer Multiplikation, sobald das Beziehungssystem ein und dasselbe ist und zugleich das Hauptsystem darstellt, dem alle in Betracht gezogenen Grössen angehören, vollendet. Und alle Gesetze der äusseren Multiplikation, so weit die nachgewiesene Analogie reicht, das heisst, welche auf die allgemeinen Verknüpfungsbegriffe, oder auf die Begriffe von Ueberordnung und Unterordnung der | Grössen und auf die Stufen- *220*
zahlen zurückgehen, werden in analoger Form, indem man nämlich die Begriffe der Ueberordnung und Unterordnung vertauscht, den Begriff der Stufenzahl aber durch den der Ergänzzahl ersetzt, auch für die eingewandte auf das Hauptsystem bezügliche Multiplikation gelten. Und da auch das Hinzufügen von Faktoren, die das Hauptsystem darstellen, wenn es nur in allen Gliedern einer Gleichung gleich vielmal geschieht, die Gleichung nicht ändert, so bestehen jene Gesetze auch noch, wenn man statt der reinen Grössen die Beziehungsgrössen setzt, deren Beziehungssystem gleichfalls das Hauptsystem ist.

§ 143*). **Doppelsystem und darauf bezügliches Produkt.**

Nachdem ich nun die vollkommene Analogie zwischen äusserer 219
und eingewandter Multiplikation dargethan habe, will ich noch auf eine Erweiterung der bisherigen Betrachtungsweise aufmerksam machen.

Hat man nämlich mehrere Grössen, welche demselben Systeme a-ter Stufe übergeordnet und demselben Systeme $(a+b)$-ter Stufe untergeordnet sind, so kann man dieselben als Produkte darstellen, deren einer Faktor (A) von a-ter Stufe und in allen derselbe ist, während die andern Faktoren demselben Systeme b-ter Stufe, B, welches von A unabhängig ist, angehören. Dann leuchtet sogleich ein, dass jede Zahlenrelation, welche zwischen diesen Faktoren, die dem Systeme B angehören, statt findet, auch zwischen den ursprünglichen Grössen (da sie durch Multiplikation der letzteren mit A hervorgehen) herrschen müsse, und umgekehrt, dass jede Zahlenrelation, welche zwischen diesen letzteren herrscht, auch zwischen den ersteren herrschen müsse (da man nach § 81 in den Gleichungen, welche jene Zahlenrelation darstellen, den Faktor A weglassen darf). Nehmen wir namentlich Grössen

*) Auch die hier angedeutete Erweiterung des Begriffes ist in der Ausgabe von 1862 von mir aufgegeben worden. (1877.)

$(a+1)$-ter Stufe an, zum Beispiel Ac, Ad, ..., wo c, d, ... dem Systeme B angehören, so werden zwischen Ac, Ad, ... dieselben Zahlenrelationen herrschen, wie zwischen c, d, ..., und umgekehrt.

Setzt man daher den Begriff des Produktes solcher Grössen Ac, Ad, ... so fest, dass es null wird, wenn das Produkt der entsprechenden Grössen c, d, ... es wird; so wird man nun alle Begriffe und Gesetze von Grössen erster Stufe in einem Systeme b-ter Stufe, also auch alle Begriffe und Gesetze von Grössen höherer Stufen in einem solchen Systeme, auf jene Grössen $(a+1)$-ter Stufe und die daraus auf gleiche Weise erzeugten Grössen übertragen können. Hierdurch
221 entwickelt sich eine Reihe neuer Begriffe, von denen ich die wichtigsten hier kurz zusammenstellen will.

Wir können die Vereinigung zweier solcher Systeme, von denen das eine dem andern untergeordnet ist, ein *Doppelsystem* nennen, und sagen, eine Grösse sei diesem Doppelsystem eingeordnet, wenn sie dem einen der beiden Systeme, aus denen das Doppelsystem besteht, übergeordnet, dem andern untergeordnet ist. Wir können das höhere von
220 den beiden Systemen, aus denen das Doppelsystem | besteht, das *Obersystem*, das niedere das *Untersystem* nennen. Dann zeigt sich, wie ein auf ein Doppelsystem bezügliches Produkt zweier geltenden Werthe, die dem Doppelsystem eingeordnet sind, allemal dann, aber auch nur dann null ist, wenn das den beiden Faktoren gemeinschaftliche System von höherer Stufe als das Untersystem, und zugleich das sie zunächst umfassende von niederer Stufe als das Obersystem ist, dass ferner ein Produkt von geltendem Werthe in Bezug auf jenes Doppelsystem als äusseres erscheint, wenn das den Faktoren gemeinschaftliche System das Untersystem ist, und als ein eingewandtes, wenn das sie zunächst umfassende System das Obersystem ist, und dass endlich ein solches Produkt zugleich als äusseres und eingewandtes aufgefasst werden kann, wenn beide Bedingungen zugleich erfüllt sind. Zugleich erweitert sich hierdurch der Begriff der Beziehungsgrösse, indem diese nun in der Form der Unterordnung als Produkt von Grössen erscheinen kann, welche drei verschiedene einander eingeordnete Systeme darstellen, von denen die erste das Obersystem, die letzte das Untersystem, und die mittlere das eigenthümliche System der Grösse ist. Um daher den eigenthümlichen Werth einer solchen Beziehungsgrösse aufzufassen, werden zwei Masse erforderlich sein, von denen das eine dem Obersystem, das andere dem Untersysteme zugehört; und nur in Bezug auf ein solches Doppelmass wird diese neue Beziehungsgrösse einen bestimmten eigenthümlichen Werth darbieten.

Da auch die Beziehungsgrössen, welche sich auf ein einfaches

System beziehen, als auf ein Doppelsystem bezügliche angesehen werden können, dessen Untersystem von nullter Stufe ist, so zeigt sich, dass die neu gewonnene Grössengattung von allgemeinerer Natur ist und jene erstere als besondere Gattung unter sich begreift. Da ferner die Beziehungsgrössen als allgemeinere Grössengattung zu den reinen Elementargrössen, und diese wieder als allgemeinere Grössengattung 222
zu den reinen Ausdehnungsgrössen auftraten, so bilden die Beziehungsgrössen überhaupt die allgemeinste Grössengattung, zu welcher wir auf dieser Stufe gelangen. Da zugleich auch die reine Multiplikation als die allgemeinste Multiplikationsweise sich darstellt, bei welcher noch die allgemeinen multiplikativen Gesetze und namentlich auch das Zusammenfassungsgesetz fortbesteht, so erscheint hier die theoretische Darstellung dieses Theils der Ausdehnungslehre als | vollendet, insofern 221
man nicht auch die Multiplikationsweisen in Betracht ziehen will, für welche das Zusammenfassungsgesetz nicht mehr gilt.*)

Wir schreiten daher zu den Anwendungen, und behalten dem folgenden Kapitel nur noch die specielle Behandlung der Verwandtschaftsverhältnisse vor, welche am geeignetsten erscheint, um die in diesem Theile gewonnenen Ergebnisse in einander zu verflechten, und ihre gegenseitigen Beziehungen ans Licht treten zu lassen.

B. Anwendungen.

§ 144. **Eingewandtes Produkt in der Geometrie.**

Zunächst ergeben sich aus dem allgemeinen Begriffe für die *Geometrie* folgende Resultate:

Das Produkt zweier Liniengrössen in der Ebene ist der Durchschnittspunkt beider Linien, verbunden mit einem Theil jener Ebene als Faktor; sind zum Beispiel ab und ac, wo a, b, c Punkte vorstellen, die beiden Liniengrössen, so ist ihr Produkt $abc\,.\,a$; ferner das Produkt dreier Liniengrössen in der Ebene ist gleich dem zweimal als Faktor gesetzten doppelten Flächeninhalt des von den Linien eingeschlossenen Dreiecks, multiplicirt mit dem Produkt der drei Quotienten, welche ausdrücken, wie oft jede Seite in der zugehörigen Liniengrösse enthalten ist; denn sind a, b, c jene drei Punkte, und mab, nac, pbc, wo m, n, p Zahlgrössen sind, die drei Liniengrössen, so ist das Produkt derselben gleich

$$mnp\,.\,abc\,.\,abc.$$

*) Wie solche Produkte, welche allerdings auch eine mannigfache Anwendung gestatten, zu behandeln seien, habe ich am Schlusse des Werkes anzudeuten gesucht.

Das Produkt zweier Plangrössen im Raume ist ein Theil der Durchschnittskante multiplicirt mit einem Theil des Raumes, zum Beispiel $abc \,.\, abd = abcd \,.\, ab$, ferner das Produkt dreier Plangrössen ist der
223 Durchschnittspunkt der drei Ebenen multiplicirt mit zwei Theilen des Raumes, zum Beispiel $abc \,.\, abd \,.\, acd = abcd \,.\, abcd \,.\, a$. Das Produkt von vier Plangrössen stellt drei als Faktoren verbundene Theile des Raums dar, zum Beispiel

$$mabc \,.\, nabd \,.\, pacd \,.\, qbcd = mnpq \,.\, abcd \,.\, abcd \,.\, abcd.$$

Dies letzte Produkt wird null, wenn eine der Grössen $m, \ldots q$ es wird, oder wenn der eingeschlossene Körperraum null wird, das heisst, die vier Ebenen sich in einem Punkte schneiden, wie dies auch schon im Begriff liegt. Das Produkt einer Liniengrösse und einer Plangrösse
222 ist | ein Theil des Raumes multiplicirt mit dem Durchschnittspunkt, zum Beispiel $ab \,.\, acd = abcd \,.\, a$.

Ich habe oben (§ 118) die Methode, die Kurven und Oberflächen durch Gleichungen darzustellen, mit unserer Wissenschaft in Beziehung gesetzt, und gezeigt, wie zum Beispiel eine Oberfläche als geometrischer Ort eines Punktes dargestellt werden kann, zwischen dessen Zeigern (in Bezug auf irgend ein Richtsystem) eine Gleichung statt findet. Ich habe dort gezeigt, wie die Oberfläche auch als Umhülle einer veränderlichen Ebene oder vielmehr Plangrösse dargestellt werden kann, zwischen deren Zeigern eine Gleichung n-ten Grades statt findet, und ich habe dort angedeutet, dass die umhüllte Oberfläche dann eine Oberfläche n-ter Klasse sei; dies hängt davon ab, dass die Gleichung zwischen den Zeigern einer veränderlichen Ebene, welche einen festen Punkt umhüllt, dann von erstem Grade ist.

In der That, ist a dieser Punkt und P die Ebene, so hat man sogleich für den Fall, dass P durch a geht, die Gleichung

$$P \,.\, a = 0.$$

Sind A, B, C, D die vier Richtmasse dritter Stufe, als deren Vielfachensumme P erscheint, und wird einer der Zeiger, zum Beispiel der von D, gleich Eins gesetzt (was immer, da es auf den Masswerth*) von P nicht ankommt, verstattet ist), und ist

$$P = xA + yB + zC + D,$$

so erhält man

$$0 = Pa = xAa + yBa + zCa + Da,$$

was eine Gleichung ersten Grades ist; somit erscheint, wie es sein
224 muss, der Punkt als Oberfläche erster Klasse.

*) So nenne ich das Quantum der Grösse, wenn ihr System schon feststeht.

Will man die Gleichung eines Punktes aufstellen, der durch drei feste Ebenen bestimmt ist, oder, was dasselbe ist, will man die Bedingung aufstellen, unter welcher eine Ebene P mit drei andern A, B, C durch denselben Punkt geht, so hat man sogleich

$$P \, . \, A \, . \, B \, . \, C = 0,$$

eine Gleichung, welche die höchst verwickelten Gleichungen, zu | denen 223
die gewöhnliche Koordinatenmethode führt, vollkommen ersetzt.

§ 145. Allgemeiner Satz über algebraische Kurven und Oberflächen.

Die Gleichungen für die Kurven und krummen Oberflächen, wie wir sie bisher darstellten, waren, da sie zwischen den Zeigern der veränderlichen Grösse statt fanden, rein arithmetischer Natur, und bezogen sich jedesmal auf bestimmte, mit der Natur des durch die Gleichung dargestellten Gebildes in keinem Zusammenhang stehende Richtsysteme; und nur die Gleichungen ersten Grades stellten wir in rein geometrischer Form dar. In der That konnten auch nur diese, wenn wir bei dem reinen Produkte stehen blieben, in geometrischer Form dargestellt werden, indem die veränderliche Grösse dann nur einmal als Faktor vorkommen konnte. Dagegen bietet uns das gemischte Produkt ein ausgezeichnetes Mittel dar, um die Kurven und Oberflächen höherer Grade in rein geometrischer Form darzustellen.

Es ist nämlich sogleich klar, *dass, wenn wir eine beliebige Gleichung zwischen Ausdehnungsgrössen haben, deren Glieder gemischte Produkte sind, der Grad der Gleichung in Bezug auf eine derselben* (P) *stets so hoch ist, als die Anzahl* (m) *beträgt, wie oft diese Ausdehnungsgrösse* (P) *in einem und demselben Gliede von geltendem Werthe höchstens als Faktor vorkommt, das heisst, dass sie durch Zahlengleichungen ersetzt wird, von denen wenigstens Eine in Bezug auf die Zeiger der veränderlichen Ausdehnungsgrösse einen Grad erreicht, welcher jener Anzahl gleich ist.*

Dies folgt unmittelbar, da man, um zu den ersetzenden Zahlengleichungen zu gelangen, nur statt jeder Grösse die Summe aus den Produkten ihrer Zeiger in die zugehörigen Richtmasse zu setzen, dann die Gesetze der Multiplikation bei jedem Gliede der gegebenen Gleichung anzuwenden hat, indem man, statt mit der Summe zu multipliciren, mit den einzelnen Stücken multiplicirt, und dann die Glieder, welche demselben Richtgebiete gleichartig | sind, jedesmal zu Einer 225
Gleichung vereinigt. Es ist klar, dass dabei die Zeiger der veränderlichen Grösse P in einem Gliede so oft als Faktoren erscheinen, als

P in dem Gliede, aus welchem das erstere hervorging, als Faktor vorkam. Somit kann also der Grad dieser Zeigergleichungen nie höher sein, als die oben bezeichnete Anzahl (m) beträgt. Aber es muss auch wenigstens eine derselben diesen Grad (m) wirklich erreichen; denn
224 wäre dies nicht der Fall, | so müssten die sämmtlichen Glieder, welche aus demjenigen Gliede hervorgehen, was jene Grösse in höchster Anzahl als Faktor enthält, null werden, also auch jenes Glied selbst null sein, wider die Voraussetzung. Es ist also die Geltung des oben aufgestellten Satzes bewiesen.

Hierbei haben wir noch zu bemerken, dass die Gleichung im Allgemeinen nicht nur das System der veränderlichen Grösse bestimmt, sondern auch ihren Masswerth. Bei der gewöhnlichen Betrachtung der Kurven und Oberflächen kommt es aber nur auf die Bestimmung des Systems an*), obgleich auch der Masswerth für die Theorie nicht ohne Interesse ist. Wollen wir also uns der gewöhnlichen Betrachtungsweise annähern, so haben wir die allgemeine Gleichung so zu specialisiren, dass dadurch der Masswerth nicht mit bestimmt ist, das heisst, dass, wenn irgend eine Ausdehnungsgrösse der (ursprünglichen) Gleichung genügt, auch jede ihr gleichartige, das heisst, deren Zeiger denen der ersteren proportional sind, derselben genügen wird. Es ist sogleich einleuchtend, dass dann in allen Gliedern der Gleichung die Grösse P in gleicher Anzahl (m) als Faktor vorkommen muss, und dass dann auch die Zeigergleichung eine symmetrische desselben Grades wird, das heisst, in allen Gliedern ebenso viele (m) Zeiger von P als Faktoren vorkommen werden. Dividirt man dann die Gleichung durch die m-te Potenz von einem der Zeiger, so erhält man (unter der Voraussetzung, dass jener Zeiger nicht null ist) die Gleichung in der gewöhnlichen Form, in welcher sie ein Gebilde m-ten Grades bestimmt.

§ 146—148. Allgemeiner Satz über Kurven in der Ebene und Anwendung desselben auf die Kegelschnitte.

§ 146.

226 Wir beschränken uns, um die Bedeutung dieses bisher noch unbekannten Satzes, welcher über den Zusammenhang der Kurven und Oberflächen ein bisher wohl kaum geahntes Licht verbreitet, zur An-

*) Zum Beispiel, wenn eine Kurve als geometrischer Ort eines Punktes bestimmt werden soll, so kommt es nur auf die Lage dieses Punktes, nicht auf das ihm anhaftende Gewicht an; oder soll die Kurve als Umhülle einer veränderlichen geraden Linie aufgefasst werden, so kommt es eben nur auf die Lage jener Linie an, nicht auf deren Länge, also überall auf das System, nicht auf den Masswerth.

schauung zu bringen, auf die Kurven in der Ebene, indem die analoge Betrachtung der Kurven im Raume und der krummen Oberflächen dann kaum noch einer Erläuterung bedarf.

Es zeigt sich sogleich, dass die geometrische Gleichung nur dann
eine Kurve darstellen wird, wenn sie durch Eine arithmetische ersetzt 225
wird, das heisst, wenn sie, da die Ebene ein Elementarsystem dritter Stufe ist, gleichfalls von dritter Stufe ist. Hierdurch ergeben sich dann aus dem allgemeinen Satze des vorigen Paragraphen folgende Specialsätze:

Wenn die Lage eines Punktes (p) in der Ebene dadurch beschränkt ist, dass drei Punkte, welche durch Konstruktionen vermittelst des Lineals aus jenem Punkte (p) und aus einer gegebenen Reihe fester gerader Linien oder Punkte hervorgehen, in Einer geraden Linie liegen (oder drei solche Gerade durch Einen Punkt gehen), so ist der Ort jenes Punktes (p) eine algebraische Kurve, deren Ordnung man durch blosses Nachzählen findet. Nämlich man hat nur nachzuzählen, wie oft bei den angenommenen Konstruktionen auf den beweglichen Punkt (p) zurückgegangen wird, ohne dass man auf einen andern beweglichen Punkt zurückgeht; die so erhaltene Zahl (m) ist dann die Ordnungszahl der Kurve.

Es ist hierbei klar, dass, wenn man auf einen andern beweglichen Punkt zurückgeht, bei dessen Erzeugung p selbst n-mal angewandt ist, es dasselbe ist, als wäre man auf p selbst n-mal zurückgegangen.

Der Beweis besteht nur darin, dass ich zeige, wie daraus eine geometrische Gleichung hervorgeht, in der p so oft als Faktor eines Gliedes erscheint. Jede Konstruktion vermittelst des Lineals in der Ebene besteht nämlich darin, dass entweder zwei Punkte durch eine gerade Linie verbunden, oder der Durchschnittspunkt zweier gerader Linien bestimmt wird; die gerade Linie zwischen den beiden Punkten ist aber das Produkt derselben, und der Durchschnittspunkt zweier gerader Linien, wenn es nicht auf das Gewicht ankommt, gleichfalls ihr Produkt; folglich kann ich jeder linealen Konstruktion, bei welcher ein Punkt oder eine Linie angewandt wird, eine Multiplikation mit
diesem Punkte oder dieser Linie | substituiren; die drei Punkte oder 227
Geraden, welche somit durch lineale Konstruktionen aus den gegebenen und der veränderlichen Grösse erfolgen, werden als Produkte derselben erscheinen; und da jene drei Punkte in einer geraden Linie liegen, oder jene drei Linien durch einen Punkt gehen sollen, so heisst das, ihr Produkt ist null, also hat man eine geometrische Gleichung aus einem Gliede, in welchem p so oft als Faktor erscheint, als es bei
jenen Konstruktionen angewandt ist, | also ist die entstehende Kurve 226
von eben so vielter Ordnung.

Den entsprechenden Satz für die durch eine veränderliche Gerade umhüllte Kurve erhält man aus dem obigen, wenn man die Ausdrücke Punkt und Gerade verwechselt, und statt des Ausdrucks „Ordnung“ den Ausdruck „Klasse“ einführt. Ich will hier noch bemerken, dass diese Sätze ohne alle Einschränkung gelten, wenn man nur festhält, dass der Ort eines Punktes, dessen Koordinaten durch eine Gleichung m-ten Grades von einander abhängen, ohne Ausnahme als Kurve m-ter Ordnung aufzufassen ist, mag diese Kurve nun eine Gestalt annehmen, welche sie will, mag sie zum Beispiel in ein System von m geraden Linien übergehen, und mögen selbst beliebig viele dieser Geraden zusammenfallen.

§ 147.

Um diesen Satz auf einen noch specielleren Fall zu übertragen, will ich die *geometrische Gleichung für die Kurven zweiter Ordnung* aufstellen.

Ist p der veränderliche Punkt, so hat man als Gleichung des zweiten Grades, wenn die kleinen Buchstaben Punkte, die grossen Linien vorstellen,

$$paBcDep = 0,$$

oder, in Worten ausgedrückt, „wenn die Seiten eines Dreiecks sich um drei feste Punkte a, c, e schwenken, während zwei Ecken sich in zwei festen Geraden B und D bewegen, so beschreibt die dritte Ecke einen Kegelschnitt.“

Die Gleichung eines Kegelschnittes, welcher durch fünf Punkte a, b, c, d, e geht, ist

$$(pa \,.\, bc)(pd \,.\, ce)(db \,.\, ae) = 0;$$

dass sie nämlich ein Kegelschnitt sei, folgt aus dem allgemeinen Satze; dass die fünf Punkte a, b, c, d, e in ihm liegen, ergiebt sich leicht, indem jeder derselben statt p gesetzt der Gleichung genügt.

Nämlich zuerst ist klar, dass, wenn man p gleich a oder d setzt, auch ein Faktor, nämlich pa oder pd null wird, also das ganze Produkt null wird; also sind a und d Punkte des Kegelschnittes. Ferner,
228 wenn p gleich c ist, so stellen die beiden ersten Faktoren des ganzen Produktes beide den Punkt c dar, also ist ihr Produkt null; ist p gleich b, so stellt der erste Faktor des ganzen Produktes die Grösse b dar, das Produkt der beiden letzten die Grösse bd, und bbd ist null; ist p gleich e, so stellt der mittlere Faktor die Grösse e dar, das Produkt der beiden andern stellt die Grösse ae dar, und eae ist wieder
227 null. Also liegen alle fünf Punkte in jenem Kegelschnitt, und | es ist

also die Aufgabe, die Gleichung eines durch fünf Punkte bestimmten Kegelschnittes aufzufinden, dadurch gelöst.

Uebrigens stellt jene Gleichung nichts anders als die bekannte Eigenschaft des mystischen Sechsecks dar.

§ 148.

Ich kann mich hier nicht auf die Entwicklung der neuen Kurventheorie einlassen, welche durch den von mir aufgestellten allgemeinen Satz bedingt ist; ich muss mich hier damit begnügen, den Satz selbst in seiner Allgemeinheit hingestellt, und durch seine Anwendung auf die einfachsten Fälle seine Bedeutung anschaulich gemacht zu haben.

Ich bin überzeugt, dass schon hierdurch sowohl die Einfachheit als auch die ausgezeichnete Allgemeinheit jenes Satzes klar geworden sein wird; indem ja in der That alle Sätze, welche auf die Abhängigkeit der Kurven von linealen Konstruktionen sich beziehen, hieraus mit der grössten Leichtigkeit hervorströmen, während ihre Ableitung bisher, wenn jene Sätze überhaupt bekannt waren, vermittelst weitläuftiger Theorien erfolgte, und jeder dieser Sätze eine eigne Ableitung erforderte. Es ist auch klar genug, wie man jetzt diesen allgemeinen Satz auch ohne Hülfe der von mir angewandten Analyse ohne Schwierigkeit beweisen kann; aber erst durch sie tritt der Satz in seiner unmittelbaren Klarheit hervor, wie er auch durch sie aufgefunden ist; und zugleich bietet diese Analyse den höchst wichtigen Vortheil dar, die durch lineale Konstruktionen bestimmten Kurven auf gleich einfache Weise durch Gleichungen darzustellen.

Wie der Satz ebenso auf Kurven im Raume und auf krumme Oberflächen übertragen werden kann, bedarf keiner Auseinandersetzung, da der allgemeine Satz in § 145 dies schon in viel grösserer Allgemeinheit für die abstrakte Wissenschaft leistet.

Viertes Kapitel.

Verwandtschaftsbeziehungen.

§ 149—151. Allgemeiner Begriff der (äusseren und eingewandten) Abschattung und Projektion.

§ 149.

Wir knüpfen die Darstellung der Verwandtschaftsbeziehungen an 229
den Begriff der *Abschattung*.

Unter der Abschattung einer Grösse A auf ein Grundsystem G nach einem Leitsysteme L verstanden wir (§ 82) diejenige Grösse A',
228 welche dem Grundsysteme | G zugehört, und mit einem Theile des Leitsystemes (L) gleiches Produkt liefert, wie die abgeschattete Grösse (A), wobei vorausgesetzt wurde, dass G von L unabhängig ist, und das System LG das Hauptsystem darstellt, auf welches sich jenes Produkt bezieht.

Diese Erklärung stellten wir dort (in § 82) nur für den Fall fest, dass unter den Grössen A, L, G reine Ausdehnungsgrössen verstanden seien, und die Multiplikation eine äussere, also A' dem Grundsysteme G untergeordnet sei. Diese Erklärung erweiterten wir in § 108, indem wir statt der Ausdehnungsgrössen eine allgemeinere Grössengattung, die Elementargrössen einführten, und in § 142 deuteten wir eine noch weiter reichende Verallgemeinerung an, indem statt der äusseren Multiplikation mit den nöthigen Veränderungen und Beschränkungen die eingewandte eingeführt werden konnte.

Halten wir die Bestimmung fest, dass zwei Grössen einander eingeordnet genannt werden, wenn eine von ihnen der andern untergeordnet ist, so können wir sagen: *Unter der Abschattung einer reinen Grösse A auf ein Grundsystem G nach einem Leitsysteme L verstehen wir diejenige Grösse A', welche dem Grundsysteme G eingeordnet ist, und mit einem Theile von L in Bezug auf das aus Grundsystem und Leitsystem kombinirte System LG multiplicirt dasselbe Produkt liefert, wie die abgeschattete Grösse A.* Dabei ist also vorausgesetzt, dass LG ein äusseres Produkt darstellt und das Hauptsystem ist, dem auch die Grösse A angehört, und auf welches sich die Multiplikation bezieht.

Es ergiebt sich hieraus sogleich im allgemeinsten Sinne die höchst einfache Gleichung

$$A' = \frac{LA \, . \, G}{LG}.$$

230 In der That, da LA nach der Definition gleich LA' ist, so ist auch

$$LA \, . \, G = LA' \, . \, G;$$

und da hier gleichfalls nach der Definition A' und G einander eingeordnet sind, so kann man A' und G nach § 136 vertauschen und erhält somit den Ausdruck der rechten Seite

$$= LG \, . \, A'.$$

Somit ist nun, indem man durch LG die gewonnene Gleichung

$$LA \, . \, G = LG \, . \, A'$$

dividirt, die Richtigkeit der oben aufgestellten Gleichung

$$A' = \frac{LA \, . \, G}{LG}$$ 229

erwiesen, das heisst,

man erhält die Abschattung einer Grösse, wenn man das Leitsystem mit ihr und dem Grundsysteme fortschreitend multiplicirt, und das Resultat durch das Produkt des Leitsystems in das Grundsystem dividirt.

Hierdurch ist die in § 85 gestellte Aufgabe, die Abschattung analytisch auszudrücken, wenn die abzuschattende Grösse und der Sinn ihrer Abschattung, das heisst Grundsystem und Leitsystem gegeben sind, für reine Grössen allgemein gelöst.

§ 150.

Für Beziehungsgrössen haben wir nur festzusetzen, dass ihre Abschattung gefunden wird, wenn man sowohl ihren eigenthümlichen Werth in Bezug auf irgend ein Mass, als auch dies Mass abschattet, und in den Ausdruck der Beziehungsgrösse diese Abschattungen statt jener Grössen einführt. Ist zum Beispiel $H^3 \, . \, A$ die Beziehungsgrösse, H ihr Hauptmass und sind H', A' die Abschattungen von H und A nach irgend einem Richtsysteme genommen, so ist $H'^3 \, . \, A'$ die Abschattung der Beziehungsgrösse $H^3 \, . \, A$ nach demselben Richtsysteme.

Es liegt übrigens in der ursprünglichen Definition, dass die Abschattung einer Zahlengrösse sowohl, als einer Grösse, die das Hauptsystem LG darstellt, der abgeschatteten Grösse selbst gleich ist. Daraus folgt, dass, wenn das Beziehungssystem einer Beziehungsgrösse mit dem Hauptsysteme LG zusammenfällt, man dann, um die Beziehungsgrösse abzuschatten, nur ihren eigenthümlichen Werth abzuschatten braucht, und dass dann für die Abschattung der Beziehungsgrösse noch die für reine Grössen aufgestellte Definition der Abschattung gilt.

Wir wollen die Abschattung | eine äussere oder [eine] eingewandte 231
nennen, je nachdem das Produkt LA ein äusseres oder [ein] eingewandtes, das heisst, je nachdem die abzuschattende Grösse von niederer oder höherer Stufe ist, als das Grundsystem. Ist sie von gleicher Stufe, so kann LA als äusseres und auch als eingewandtes Produkt aufgefasst, die Abschattung dann also gleichfalls auf beiderlei Arten benannt werden.

§ 151.

Nennt man das System des Produktes zweier Grössen | die Kombination*) dieser Grössen oder ihrer Systeme, und nennt man das 230

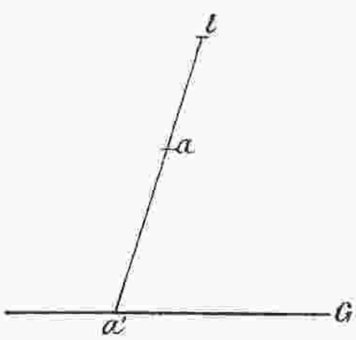
---

*) Nach diesem Begriffe ist die Kombination, wenn das entsprechende Produkt null ist, unbestimmt.

System der Abschattung die P r o j e k t i o n des Systems der abgeschatteten Grösse, so kann man sagen, *die Projektion eines Systemes werde gefunden, wenn man das System fortschreitend mit dem Leitsysteme und dem Grundsysteme kombinirt.* Indem wir dann die Projektion irgend einer Gesammtheit von Elementen, deren umfassendes System von gleicher oder niederer Stufe ist als das Grundsystem, als Gesammtheit der Projektionen dieser Elemente definiren, so haben wir den gewöhnlichen Begriff der Projektion, nur in etwas erweiterter Form; und es zeigt sich, wie sich die Projektion von der Abschattung nur durch den Masswerth unterscheidet, während das System dasselbe ist.

Um dies auf die *Geometrie* anzuwenden, wollen wir zuerst als Grundsystem eine Linie G, als Leitsystem eine davon unabhängige Elementargrösse erster Stufe l, das heisst, da es nur auf das System ankommt, entweder einen Punkt oder eine Richtung setzen. Die Projektion eines Punktes a ist dann der Durchschnitt der Linie al mit G (Fig. 13), während die Abschattung a' gleich $\frac{la \,.\, G}{lG}$ ist. Ist l eine Richtung (oder eine mit dieser Richtung begabte Strecke), so ist die Projektion der Durchschnitt einer von a aus nach dieser Richtung gezogenen Linie mit der Grundlinie G.

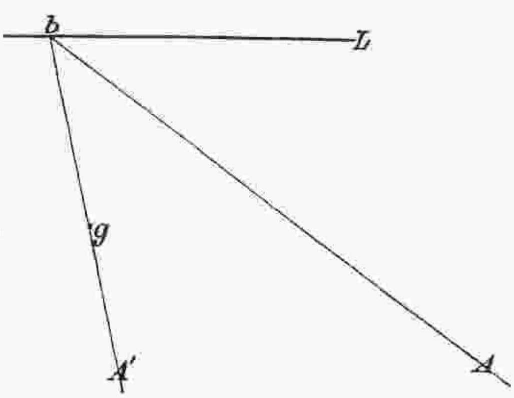
Fig. 13.



Ist das Grundsystem ein Punkt g, das Leitsystem eine Linie L, so wird eine Linie A projicirt, indem man den Durchschnitt zwischen A und L mit g verbindet (s. Fig. 14)*). Die Abschattung eines Theiles jener
232 Linie, | den wir gleichfalls mit A bezeichnen, wird dann dargestellt durch die Gleichung

$$A' = \frac{LA \,.\, g}{Lg}.$$

Fig. 14.



Nach dieser Analogie wird man sich leicht eine Anschauung bilden können von der Projektion eines Punktes oder einer Linie, wenn das Grundsystem eine Ebene, das Leitsystem ein Punkt oder eine Richtung

*) Man ist zwar nicht gewohnt, die so entstehende Linie als Projektion zu betrachten; allein die Analogie fordert diese Betrachtungsweise. Die Projektion ist hier nämlich eine eingewandte, s. oben.

ist; ferner von der eines Punktes oder einer Ebene, wenn | Leitsystem 231
und Grundsystem Linien sind; endlich von der einer Linie oder Ebene, wenn das Grundsystem ein Punkt, das Leitsystem eine Ebene ist. Ist die abzuschattende Grösse von gleicher Stufe mit dem Grundsystem, so zeigt sich leicht, dass die Projektion ihres Systemes das Grundsystem selbst ist, dass also das Wesen der Abschattung dann nur in dem Masswerthe derselben beruht.

§ 152. **Abschattung der Summe.**

Wir haben nun die Geltung der im fünften Kapitel des I. Abschnittes (von § 81 an) für die dort behandelte Art der Abschattung erwiesenen Gesetze auch für den soeben dargestellten allgemeineren Begriff derselben zu untersuchen.

Dass diese Sätze noch gelten, wenn man statt der Ausdehnungsgrössen Elementargrössen setzt, folgte schon aus der vollkommenen Uebereinstimmung zwischen den Gesetzen, die für beiderlei Grössen gelten (s. § 108). Es ist also die Geltung derselben nur noch für die eingewandte Abschattung darzulegen, und zugleich sind jene Sätze noch so zu erweitern, dass man auch statt der äusseren Multiplikation die eingewandte einführt.

Vergleichen wir den von § 81 an gewählten Gang der Entwickelung, so können wir zunächst den am Schlusse jenes Paragraphen aufgestellten Satz für das eingewandte Produkt in folgender Form darstellen:

Wenn die Glieder einer Gleichung sämmtlich eingewandte Produkte zu zwei Faktoren sind, und entweder der erste oder der letzte Faktor (L) *in allen diesen Gliedern derselbe ist, die ungleichen Faktoren aber demselben Systeme* (G) *übergeordnet sind, und dies System* (G) *mit dem gleichen Faktor L multiplicirt das Hauptsystem liefert, so kann man den Faktor L in allen Gliedern weglassen.*

In der That werden sich dann die ungleichen Faktoren in den Formen AG, BG, ... darstellen lassen, wo A, B, ... dem L unter- 233
geordnet und die Produkte äussere sind; dann wird die Gleichung in der Form

$$L\,.\,AG + L\,.\,BG + \cdots = 0$$

erscheinen, oder da

$$L\,.\,AG = LG\,.\,A$$

ist, weil A dem L untergeordnet, G aber und L kombinirt das Hauptsystem darstellen, und ebenso

$$L\,.\,BG = LG\,.\,B, \ldots,$$ 232

so erhält man
$$LG \,.\, A + LG \,.\, B + \cdots = 0,$$
das heisst,
$$LG\,(A + B + \cdots) = 0,$$
welcher Gleichung, da LG das Hauptsystem darstellt, nur genügt wird, wenn
$$A + B + \cdots = 0,$$
also auch
$$(A + B + \cdots)\,G,$$
das heisst
$$AG + BG + \cdots$$
gleich Null ist, und somit ist jener Satz bewiesen.

Aus diesem Satze folgen nun ganz auf dieselbe Weise, wie in § 82, die Sätze:

Eine Gleichung bleibt als solche bestehen, wenn man alle ihre Glieder in demselben Sinne abschattet,

und

Die Abschattung einer Summe ist gleich der Summe aus den Abschattungen der Stücke.

In der That erhält man, wenn man die gegebene Gleichung gliedweise mit dem Leitsystem (L) multiplicirt, und statt der Glieder der ursprünglichen Gleichung nun in diese neue Gleichung ihre Abschattungen auf dasselbe Grundsystem G setzt (was nach der Definition der Abschattung verstattet ist), die Gleichung in der Form, dass man nach dem zuletzt bewiesenen Satze den Faktor L weglassen darf; wodurch dann der erste jener beiden Sätze erwiesen ist, und somit auch der zweite, welcher nur eine andere Ausdrucksweise desselben Satzes darstellt*).

§ 153. **Abschattung des Produktes.**

234 Die Sätze in § 84 setzen die Abschattung eines äusseren Produktes in Beziehung mit den Abschattungen seiner Faktoren, und wir haben die entsprechenden Sätze aufzustellen, sowohl wenn das Produkt ein eingewandtes, als auch wenn die Abschattung eine eingewandte wird.

Ist das Produkt ein eingewandtes, dessen Beziehungssystem zugleich das Hauptsystem der Abschattung ist, und ist die Abschattung durchweg eine eingewandte, das heisst nicht nur die der Faktoren jenes
233 Produktes, sondern auch ins Besondere [die] des | Produktes selbst,

*) Was dem in § 83 dargestellten Satze entspricht, ist seinem wesentlichen Gehalte nach schon früher da gewesen, und kann daher hier übergangen werden.

so gilt der in § 84 dargestellte Satz, dass die Abschattung eines Produktes das Produkt ist aus den Abschattungen seiner Faktoren, auch für den soeben bezeichneten Fall, indem die Beweisführung genau dieselbe ist, wie in jenem Paragraphen. Nämlich, sind A, B die Faktoren des Produktes, L das Leitsystem, G das Grundsystem, so ist das Produkt $L.(A.B)$ ein eingewandtes aus drei Faktoren in Bezug auf dasselbe Hauptsystem; da man hier beliebig zusammenfassen und mit Beobachtung der Vorzeichen vertauschen kann, so wird der Werth jenes Produktes nicht geändert, wenn man statt A und B Grössen setzt, die mit L dieselben Produkte liefern, also zum Beispiel ihre Abschattungen A' und B' auf das Grundsystem G; es ist also dann

$$L.(A'.B') = L.(A.B),$$

und da A' sowohl, als B' als eingewandte Abschattungen dem Grundsysteme übergeordnet sind, so ist es auch ihr gemeinschaftliches System, das heisst ihr Produkt, also ist $A'.B'$ die Abschattung von $A.B$ auf G nach dem Leitsysteme L.

Es ist also die Geltung des Satzes für den bezeichneten Fall bewiesen; allein es zeigt sich bald, dass derselbe allgemein gilt, sobald nur die Abschattungen des Produktes und der beiden Faktoren entweder alle drei eingewandte, oder alle drei äussere sind, mag nun das Produkt ein äusseres oder eingewandtes sein.

Wir setzen zuerst voraus, dass das Produkt einen geltenden Werth habe und seine beiden Faktoren reine Grössen seien; und zwar wollen wir die Geltung des Satzes zuerst für den Fall beweisen, dass die Abschattung durchweg eine äussere, das Produkt ein eingewandtes ist. Es seien die beiden Faktoren dieses Produktes M und N, B stelle ihr gemeinschaftliches System dar; dann werden sich M und N als äussere Produkte in den Formen AB und BC darstellen lassen; und zwar muss dann ABC als | äusseres Produkt einen geltenden Werth haben, 235
weil C mit AB keinen Faktor von geltender Stufe gemeinschaftlich haben kann; denn hätten sie einen solchen gemeinschaftlich, so würden auch M und N, wie leicht zu sehen ist, ein System höherer Stufe gemeinschaftlich haben, als B ist, gegen die Voraussetzung. Nun ist

$$M.N = AB.BC = ABC.B,$$

indem B und BC einander eingeordnete Faktoren sind, welche man daher bei der fortschreitenden Multiplikation nach § 136 vertauschen kann. Wir haben nun vorausgesetzt, dass die Abschattung durchweg 234
eine äussere sei, sowohl für die Faktoren M und N, als auch für deren Produkt, das heisst für ihr gemeinschaftliches System B und ihr nächstumfassendes ABC. Sind nun A', B', C', M', N' beziehlich die äusseren

Abschattungen von A, B, C, M, N, so sind (nach § 84) $A'B'$, $B'C'$, $A'B'C'$ die Abschattungen von AB, BC, ABC. Ferner da $M.N$ gleich $ABC.B$ ist, so ist nach der in § 150 aufgestellten Definition die Abschattung von $M.N$ gleich dem Produkt der Abschattungen von ABC und B, also gleich $A'B'C'.B'$. Ferner ist

$$M'.N' = A'B'.B'C' = A'B'C'.B',$$

also das Produkt der Abschattungen $M'.N'$ gleich der Abschattung des Produktes $M.N$. Somit ist für den in Betracht gezogenen Fall die Gültigkeit des obigen Gesetzes nachgewiesen.

Es bleibt also das Fortbestehen dieses Gesetzes nur noch für den Fall zu beweisen, dass die Abschattung durchweg eine eingewandte ist. Der Beweis für diesen Fall ist genau derselbe, wie für den soeben betrachteten Fall, wenn man nur nach dem in § 142 aufgestellten Princip statt der äusseren Multiplikation die auf das Hauptsystem der Abschattung bezügliche eingewandte Multiplikation einführt, und die dort entwickelten Umänderungen, welche durch diese Einführung bedingt sind, eintreten lässt. Namentlich ist festzuhalten, dass, wie jede Grösse, welche einer andern untergeordnet ist, als äusserer Faktor derselben dargestellt werden kann, so auch jede Grösse, welche einer andern übergeordnet ist, als eingewandter Faktor derselben in Bezug auf das Hauptsystem dargestellt werden könne. Um jedoch die Art dieser Umänderung an einem ziemlich zusammengesetzten Beispiele klar an's Licht treten zu lassen, will ich die Uebertragung des obigen
236 Beweises hier ausführlich folgen | lassen.

Es seien die beiden Faktoren des eingewandten Produktes M und N, B stelle ihr nächstumfassendes System dar; dann werden sich M und N als eingewandte, auf das Hauptsystem der Abschattung bezügliche Produkte in den Formen AB und BC darstellen lassen*); und
235 zwar muss dann ABC als | eingewandtes, auf das Hauptsystem der Abschattung bezügliches Produkt einen geltenden Werth haben, weil AB und C von keinem niederen Systeme als dem Hauptsysteme umfasst werden können**); denn würden sie von einem solchen Systeme

---

*) In der That, wenn S ein System darstellt, welches das System von B zum Hauptsysteme der Abschattung ergänzt, so wird man nur

$$A = \frac{SM}{SB} \text{ und } C = \frac{NS}{BS}$$

zu setzen haben.

**) Hier tritt die Analogie in dem Wortausdrucke nicht so klar hervor. Sollte sie klar hervortreten, so müsste man im ersten Falle sagen: „weil das System, welches AB und C gemeinschaftlich haben, von keiner höheren Stufe als der umfasst, so würden auch M und N, wie leicht zu sehen ist*), von einem Systeme niederer Stufe umfasst werden, als B ist, gegen die Voraussetzung. Nun ist

$$M \,.\, N = AB \,.\, BC = ABC \,.\, B,$$

indem B und BC einander eingeordnete Faktoren sind, welche man daher bei der fortschreitenden Multiplikation nach § 136 vertauschen kann. Wir haben nun vorausgesetzt, dass die Abschattung durchweg eine eingewandte sei, sowohl für die Faktoren M und N, als auch für deren Produkt, das heisst, für ihr nächstumfassendes System B
und ihr gemeinschaftliches ABC. Sind nun A', B', C', M', N' | be- 237
ziehlich die eingewandten Abschattungen von A, B, C, M, N, so sind (nach § 153) $A'B'$, $B'C'$, $A'B'C'$ die Abschattungen von AB, BC, ABC. Ferner, da $M \,.\, N$ gleich $ABC \,.\, B$ ist, so ist nach der in § 150 aufgestellten Definition die Abschattung von $M \,.\, N$ gleich dem Produkt der Abschattungen von ABC und B, also gleich $A'B'C' \,.\, B'$. Ferner ist

$$M' \,.\, N' = A'B' \,.\, B'C' = A'B'C' \,.\, B',$$

also das Produkt der Abschattungen $M' \,.\, N'$ gleich der Abschattung des Produktes $M \,.\, N$. Somit ist auch für diesen Fall die Gültigkeit
des obigen Gesetzes nachgewiesen. 236

Wir setzten in beiden Fällen noch voraus, dass das abzuschattende Produkt einen geltenden Werth habe, und die Faktoren reine Grössen seien. Ist das abzuschattende Produkt null, so ist, um die Geltung jenes Gesetzes auch für diesen Fall zu erweisen, nur zu zeigen, dass das Produkt aus den Abschattungen der beiden Faktoren auch null sei.

Wenn einer der ursprünglichen Faktoren null ist, so ist auch seine Abschattung null, also auch das Produkt der Abschattungen null. Wenn aber die beiden Faktoren geltende Werthe haben, und das Produkt dennoch null ist, so muss, da

---

nullten sein kann", und im letzteren Falle: „weil das System, welches AB und C umfasst, von keiner niederen Stufe als der h-ten sein kann", indem nämlich h die Stufe des Hauptsystems bezeichnet.

*) Nämlich, wenn D jenes System darstellte, was AB, oder M, und C umfassen sollte und doch niedriger wäre als das Hauptsystem, so würde sich C als eingewandtes, auf das Hauptsystem bezügliches Produkt in der Form $D \,.\, E$ darstellen lassen, und es würde $N = B \,.\, C = B \,.\, (D \,.\, E)$, oder da dies Produkt ein reines ist, $= (B \,.\, D) \,.\, E$ sein, wo das nächstumfassende System zu B und D das Hauptsystem sein muss; es wird also das den Grössen B und D gemeinschaftliche System die Grösse N umfassen, und auch die Grösse M, da diese sowohl von B als von D umfasst wird. Das gemeinschaftliche System von B und D umfasst also M und N, ist aber von niederer Stufe als B, da D nicht das Hauptsystem ist, und B und D als nächstumfassendes System das Hauptsystem haben.

$$M . N = ABC . B$$

ist, und B nicht null ist, $ABC . B$ als Produkt in der Form der Einordnung aber nicht anders null werden kann, als wenn einer der Faktoren null wird, nothwendig ABC null sein, also auch seine Abschattung, das heisst

$$A'B'C' = 0;$$

also muss auch $A'B'C' . B'$, das heisst $M' . N'$ oder das Produkt der Abschattungen null sein. Es bleibt also auch noch in diesem Falle die Abschattung des Produktes gleich dem Produkt aus den Abschattungen der Faktoren.

Es ist nun, um das Gesetz in seiner ganzen Allgemeinheit darzustellen, nur noch die Beschränkung aufzuheben, dass die Faktoren des abzuschattenden Produktes reine Grössen sind.

Sind dieselben Beziehungsgrössen, deren Beziehungssystem (K) identisch ist mit dem Beziehungssysteme des eingewandten Produktes, und sind μ und ν die Gradzahlen jener Beziehungsgrössen, M und N ihre eigenthümlichen Werthe in Bezug auf das Mass K, so wird sich das Produkt in der Form

$$K^{\mu} M . K^{\nu} N$$

238 darstellen lassen. Dies Produkt ist nun nach § 138 gleich $K^{\mu+\nu} M . N$ oder, wenn $M . N$ gleich $K . I$ ist, gleich $K^{\mu+\nu} K . I$. Bezeichnen wir die Abschattungen mit Accenten und nehmen dieselben entweder durchweg als äussere oder durchweg als eingewandte an, so ist die Abschattung des obigen Produktes

$$= K'^{\mu+\nu} K' . I',$$
$$= K'^{\mu+\nu} M' . N',$$
$$= K'^{\mu} M' . K'^{\nu} N',$$

das heisst, gleich dem Produkte der Abschattungen. Also gilt nun das
237 Gesetz auch noch, wenn die Faktoren Beziehungsgrössen sind, deren Beziehungssystem mit dem Beziehungssysteme des eingewandten Produktes zusammenfällt. Daraus folgt nun auch, dass es für reine eingewandte Produkte aus beliebig vielen Faktoren gilt.

Nachdem wir nun alle überflüssigen Beschränkungen aufgehoben haben, können wir das Gesetz in seiner ganzen Allgemeinheit hinstellen:

Die Abschattung des Produktes ist gleich dem Produkte aus den Abschattungen seiner Faktoren, wenn für alle abzuschattenden Grössen sowohl der Sinn der Abschattung als auch das Beziehungssystem dasselbe ist.

Wir sagen nämlich, dass der Sinn der Abschattung mehrerer Grössen derselbe sei, wenn nicht nur Grundsystem und Leitsystem dieselben sind, sondern auch die Abschattungen entweder sämmtlich äussere oder sämmtlich eingewandte sind.

§ 154. **Affinität. Bildung affiner Vereine.**

Daraus, dass jede Gleichheit, welche zwischen den Vielfachensummen einer Reihe von Grössen stattfindet, auch bestehen bleibt, wenn man statt der Grössen ihre Abschattungen setzt, oder mit andern Worten, dass die Abschattungen in derselben Zahlenrelation stehen wie die abgeschatteten Grössen, folgt, dass die Verwandtschaft zwischen den Abschattungen und den abgeschatteten Grössen eine besondere Art einer allgemeineren Verwandtschaft ist, welche darin besteht, dass die zwischen einer Reihe von Grössen herrschenden Zahlenrelationen auch für die entsprechenden Grössen der zweiten Reihe gelten; und wir wollen daher diese allgemeinere Verwandtschaft der Betrachtung unterwerfen.

Es tritt jedoch diese Verwandtschaft erst in ihrer ganzen Einfachheit hervor, wenn die Beziehung eine gegenseitige ist, das heisst, wenn jede Zahlenrelation, welche zwischen Grössen der einen | Reihe, 239
welche von beiden es auch sei, stattfindet, auch zwischen den Grössen der andern Reihe herrscht; und zwei solche Vereine von entsprechenden Grössen, welche in dieser gegenseitigen Beziehung zu einander stehen, nennen wir *affin* *).

Diese Gegenseitigkeit der Beziehung führt das Gesetz herbei, welches überall jede einfache Beziehung auszeichnet, dass nämlich, wenn zwei 238
Vereine von Grössen A und B mit einem dritten C affin sind, sie es auch unter sich sind. In der That, da dann jede Relation in A auch in C stattfindet, und jede Relation, die in C stattfindet, auch in B herrscht, so muss auch jede Relation in A zugleich in B stattfinden, und aus demselben Grunde jede Relation, die in B herrscht, zugleich in A stattfinden, das heisst, A und B sind einander affin.

Es fragt sich nun, wie man zu einem beliebigen Vereine von Grössen überhaupt einen andern Verein bilden kann, welcher mit jenem in derselben Zahlenrelation stehe, und ins Besondere einen solchen,

---

*) Der Begriff der Affinität, wie wir ihn hier aufstellten, stimmt mit dem gewöhnlichen Begriff derselben in sofern überein, als er, auf dieselben Grössen angewandt, auch dieselbe Beziehung darstellt; ihr Begriff ist hier nur in sofern allgemeiner gefasst, als er sich auch auf andere Grössen übertragen lässt.

bei welchem diese Beziehung eine gegenseitige ist, das heisst, welcher dem ersteren affin sei.

Hat man in dem gegebenen Vereine n Grössen (derselben Stufe), zwischen denen keine Zahlenrelation stattfindet, als deren Vielfachensummen sich aber die übrigen Grössen jenes Vereins darstellen lassen, so lässt sich zeigen, dass man, um zu einem zweiten Vereine zu gelangen, welcher dieselben Zahlenrelationen darbietet, die in dem ersten Vereine herrschen, in dem zweiten Vereine n beliebige Grössen, welche unter sich von gleicher Stufe sind, als jenen n Grössen entsprechende annehmen kann, dann aber zu jeder andern Grösse des ersten Vereins die entsprechende im zweiten findet, indem man die erste als Vielfachensumme jener n Grössen der ersten Reihe darstellt und dann in dieser Vielfachensumme statt jener n Grössen die entsprechenden der zweiten setzt, dass aber diese Beziehung n u r dann und i m m e r dann eine gegenseitige ist, die Vereine also einander affin sind, wenn zugleich die n Grössen des zweiten Vereins keine Zahlenrelation unter sich zulassen.

240 Die Richtigkeit | dieser Behauptung beruht darauf, dass, wenn n Grössen in keiner Zahlenrelation stehen, das heisst, keine derselben sich als Vielfachensumme der übrigen darstellen lässt, und dennoch eine Vielfachensumme dieser Grössen gleich Null sein soll, nothwendig alle Koefficienten dieser Vielfachensumme einzeln genommen gleich Null sein müssen; denn hätte einer von ihnen einen geltenden Werth, so würde die Grösse, der er zugehört, sich als Vielfachensumme der übrigen darstellen lassen, was gegen die Voraussetzung ist. Aus diesem Satze nun ergiebt sich die Richtigkeit der obigen Behauptung sogleich. Denn sind $a, b, c, \ldots$ irgend welche Grössen des ersten Vereins, zwischen denen eine Zahlenrelation

239 $$\alpha a + \beta b + \cdots = 0$$

statt findet, und man drückt $a, b, \ldots$ als Vielfachensummen jener n Grössen des ersten Vereins $r_1, \ldots r_n$ aus, so wird sich jene Gleichung in der Form

$$\varrho_1 r_1 + \varrho_2 r_2 + \cdots = 0$$

darstellen lassen, in welcher nach dem soeben erwiesenen Satze alle Koefficienten null sein müssen; also

$$\varrho_1 = 0, \quad \varrho_2 = 0, \cdots.$$

Diese Grössen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ sind nur von den Koefficienten $\alpha, \beta, \ldots$ und von den Koefficienten der Vielfachensummen, in welchen $a, b, \ldots$ dargestellt sind, abhängig. Sind nun $a', b', \ldots$ und $r'_1, r'_2, \ldots$ die entsprechenden Grössen des zweiten Vereins, so müssen $a', b', \ldots$ aus

$a, b, \ldots$ dadurch hervorgehen, dass man in den Vielfachensummen, welche $a, b, \ldots$ darstellen, statt $r_1, r_2, \ldots$ die entsprechenden Grössen $r'_1, r'_2, \ldots$ setzt. Folglich wird der Ausdruck

$$\alpha a' + \beta b' + \cdots = \varrho_1 r'_1 + \varrho_2 r'_2 + \cdots$$

sein, und also, da $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ einzeln genommen null sind, selbst gleich Null sein müssen, also

$$\alpha a' + \beta b' + \cdots = 0,$$

das heisst, zwischen den Grössen des zweiten Vereins bleibt jede Zahlenrelation bestehen, welche zwischen denen des ersten besteht. Sind nun die Grössen $r'_1, \ldots r'_n$ gleichfalls von der Beschaffenheit, dass zwischen ihnen keine Zahlenrelation stattfindet, so lässt sich ebenso der Rückschluss machen, die Beziehung ist also dann eine gegenseitige, und die beiden Vereine von Grössen sind einander affin. Hingegen, herrscht zwischen diesen Grössen $r'_1, \ldots r'_n$ eine | Zahlenrelation, so ist klar, 241
dass man, da diese Relation zwischen den entsprechenden Grössen des ersten Vereins nicht stattfindet, auch nicht von dem Herrschen einer Relation innerhalb des zweiten Vereins einen Schluss auf das Fortbestehen derselben im ersten machen darf, dass vielmehr die Beziehung dann nur eine einseitige ist.

§ 155, 156. **Entsprechen der Produkte entsprechender Grössen aus zwei affinen Vereinen.**

§ 155.

Wenn nun zwei Vereine entsprechender Grössen einander affin sind, so werden auch die Produkte aus den Grössen des einen Vereins den entsprechend gebildeten Produkten des andern Vereins affin sein, wenn nur die Multiplikationsweise, durch welche diese entsprechenden Produkte gebildet sind, in beiden Vereinen | in dem Sinne genommen 240
ist, dass das Produkt dann, aber auch nur dann als null erscheint, wenn die Faktoren in einer Zahlenrelation zu einander stehen.

Ist nämlich die Multiplikation in dieser Weise angenommen, so kann zuerst zwischen den verschiedenen Produkten, welche sich aus den n Grössen $A_1, \ldots A_n$ des einen Vereins, die in keiner Zahlenrelation zu einander standen, bilden lassen, gleichfalls keine Zahlenrelation stattfinden; das heisst, es kann keins dieser Produkte sich als Vielfachensumme der übrigen darstellen lassen. Denn gesetzt, es wäre dies der Fall, so könnte man in der Gleichung, welche jenes Produkt, zum Beispiel $A_1 A_2 A_3$, als Vielfachensumme der übrigen darstellt, jedes Glied mit den sämmtlichen Faktoren $A_4 \ldots A_n$ multipliciren, die jenes

Produkt nicht enthält; durch diese Multiplikation werden dann alle übrigen Produkte mit Ausnahme dessen, was als Vielfachensumme der übrigen erscheinen soll, null, weil in ihnen wenigstens einer von den hinzutretenden Faktoren schon unter den vorhandenen Faktoren vorkommt, also nun zwischen den Faktoren Gleichheit, also auch eine Zahlenrelation statt findet; man erhält daher die Gleichung

$$A_1 . A_2 \ldots A_n = 0,$$

das heisst, zwischen $A_1, \ldots A_n$ würde eine Zahlenrelation statt finden müssen, was wider die Voraussetzung ist.

Betrachtet man nun ferner ein Produkt PQR, dessen Faktoren Grössen jenes Vereins, also als Vielfachensummen von $A_1, \ldots A_n$ darstellbar sind, so wird auch dies Produkt, wenn man die einzelnen Faktoren als Vielfachensummen darstellt, gliedweise durchmultiplicirt und die Faktoren der einzelnen Glieder gehörig ordnet, als Vielfachen-
242 summe | der aus den Faktoren $A_1, \ldots A_n$ gebildeten Produkte erscheinen. Sind nun in dem andern Vereine $A'_1, \ldots A'_n$ als die den Grössen $A_1, \ldots A_n$ entsprechenden angenommen, und werden als die ihren Produkten $A_1 A_2 A_3, \ldots$ entsprechenden Grössen die Produkte der entsprechenden Faktoren $A'_1 A'_2 A'_3, \ldots$ angenommen (was verstattet ist, da zwischen jenen Produkten des ersten Vereins keine Zahlenrelation stattfindet), so wird dem Produkte PQR das Produkt $P'Q'R'$ der entsprechenden Faktoren gleichfalls entsprechen. Denn man erhält aus PQR das Produkt $P'Q'R'$, wenn man, nachdem P, Q, R als Vielfachensummen von $A_1, \ldots A_n$ dargestellt sind, statt $A_1, \ldots A_n$ die
241 entsprechenden Grössen $A'_1, \ldots A'_n$ setzt. Das Gesetz des | Durchmulticirens ist nun für beide Produkte dasselbe, jedes Produkt ferner zwischen $A_1, \ldots A_n$, was gleiche Faktoren enthält und somit null wird, hat auch zum entsprechenden Produkte ein solches, was null wird; und darin liegt, dass auch dasselbe Vertauschungsgesetz herrscht, indem $(A + B)(A + B)$ oder $AB + BA$ in beiden Fällen null ist, also die Faktoren nur mit Zeichenwechsel vertauschbar sind. Daraus nun folgt, dass, wenn PQR als Vielfachensumme der aus den Faktoren $A_1, \ldots A_n$ gebildeten Produkte erscheint, man daraus $P'Q'R'$ erhält, indem man statt $A_1, \ldots A_n$ die entsprechenden Grössen $A'_1, \ldots A'_n$, oder statt der aus den ersteren gebildeten Produkte die aus den letzteren gebildeten setzt.

Hierin liegt nun vermittelst des obigen Gesetzes, dass die Produkte des zweiten Vereins in derselben Zahlenrelation stehen, wie die entsprechenden des ersten, und dass also, wenn die beiden Vereine einander affin sind, auch die Produkte des einen Vereins den entsprechenden des andern affin sind.

§ 156.

Es giebt unter den bisher betrachteten Multiplikationsweisen nur zwei, welche der im vorigen Paragraphen ausgesprochenen Bedingung genügen, dass nämlich das Produkt dann und nur dann als null erscheinen soll, wenn zwischen den Faktoren eine Zahlenrelation herrscht, das sind nämlich erstens die äussere Multiplikation von Grössen erster Stufe und zweitens die eingewandte Multiplikation von Grössen $(n-1)$-ter Stufe in einem Hauptsysteme n-ter Stufe und in Bezug auf dasselbe.

Dass die übrigen Multiplikationsweisen, welche wir bisher kennen gelernt haben, nicht den Bedingungen des vorigen Paragraphen genügen, leuchtet sehr | bald ein. Zwar würde das in jenem Paragraphen 243
dargestellte Verwandtschaftsgesetz ein vortreffliches Mittel darbieten, um in die Bedeutung des formalen Produktes, welches wir bisher nicht der Betrachtung unterworfen hatten, hineinzudringen; doch wollen wir uns durch solche Betrachtungen, welche uns jedenfalls in schwierige und weitläuftige Untersuchungen verwickeln würden, nicht den Raum für andere, wichtigere Gegenstände verkürzen; und wir bleiben daher bei den beiden Fällen stehen, auf welche unser Gesetz direkte Anwendung erleidet.

§ 157. Direkte und reciproke Affinität. Allgemeiner Satz.

Wir gelangen durch Anwendung des in § 155 dargestellten Gesetzes auf die beiden in § 156 aufgeführten Multiplikationsweisen zu zwei Hauptgattungen der Affinität, nämlich der direkten und der reciproken, indem eines Theils den Grössen | erster Stufe des einen 242
Vereins Grössen erster Stufe des andern entsprechen; und andern Theils den Grössen erster Stufe des einen Vereins Grössen $(n-1)$-ter Stufe des andern entsprechen, wenn jeder Verein ein System n-ter Stufe als Hauptsystem darbietet. Wir können daher folgenden Hauptsatz der Affinität aussprechen:

Wenn man zu n von einander unabhängigen Grössen erster Stufe n gleichfalls von einander unabhängige Grössen erster Stufe oder n Grössen $(n-1)$-ter Stufe, welche einem System n-ter Stufe angehören, deren eingewandtes Produkt aber einen geltenden Werth hat, als entsprechende nimmt, so bilden die aus den entsprechenden Grössen durch dieselben Grundverknüpfungen gebildeten Grössen zwei einander affine Vereine von Grössen, und jede Grundgleichung, welche zwischen den Grössen des einen Vereins besteht, bleibt auch bestehen, wenn man statt dieser Grössen die entsprechenden des andern setzt. Im ersten Falle heissen beide Vereine direkt affin, im zweiten reciprok affin.

Dieser Satz ist von so allgemeiner Geltung, dass er, wie wir späterhin zeigen werden, die allgemeinsten linearen Verwandtschaften, wie die Kollineation und Reciprocität, unter sich begreift und den vollständigen Begriff dieser Verwandtschaften, welche bei der gewöhnlichen Auffassungsweise nur in unvollkommener Gestalt hervortreten, darstellt. Namentlich liegt in diesem Satze, dass, wenn m Grössen des einen Vereins irgend einem System angehören, dann auch die ent-
244 sprechenden Grössen des andern Vereins bei der direkten | Affinität einem System derselben Stufe angehören, bei der reciproken einem System von ergänzender Stufe, weil nämlich das Produkt derselben gleichzeitig null wird.

§ 158. **Zusammenhang zwischen Abschattung und Affinität.**

Wir haben nun die Abschattung als besondere Art der konstanten Zahlenrelation und der Affinität darzustellen, und anzugeben, in welchem Falle die allgemeine Verwandtschaft in diese besondere übergeht.

Wenn zuerst zwischen den Grössen erster Stufe eines Vereins A dieselben Zahlenrelationen statt finden, welche zwischen den entsprechenden Grössen erster Stufe eines andern Vereines B herrschen, so fragt sich, welcher Bedingung beide Vereine unterworfen sein müssen, wenn
243 der erste Verein A zugleich die Abschattung des | zweiten B sein soll.

Nennen wir das System, welches einen Verein von Grössen erster Stufe zunächst umfasst, *das System dieses Vereins*, so leuchtet ein, dass A nur dann die Abschattung von B sein könne, wenn in demjenigen Systeme C, welches den Systemen beider Vereine gemeinschaftlich ist, die entsprechenden Grössen beider Vereine zusammenfallen, das heisst, einander gleich sind, wie dies unmittelbar aus der Idee der Abschattung hervorgeht. Wir können aber auch zeigen, dass, wenn diese Bedingung eintritt, auch jedesmal der Verein A als Abschattung des Vereines B aufgefasst werden könne, und der Sinn der Abschattung dann bestimmt sei.

Um dies zu beweisen, können wir zuerst das System von B als Kombination des gemeinschaftlichen Systemes C mit einem davon unabhängigen Systeme darstellen. Dies System, welches dann zugleich von dem Systeme des Vereines A unabhängig sein wird, sei von m-ter Stufe, das heisst, es sei durch das äussere Produkt von m Grössen erster Stufe $b_1, \ldots b_m$ dargestellt, welche alle von einander unabhängig sind. Wird nun vorläufig L als das Leitsystem angenommen, und sind $a_1, \ldots a_m$ die den Grössen $b_1, \ldots b_m$ entsprechenden Grössen des ersten Vereins A, so erhält man, wenn zugleich $a_1, \ldots a_m$ die Abschattungen von $b_1, \ldots b_m$ nach dem Leitsysteme L sein sollen, die Gleichungen:

$$L \, . \, a_1 = L \, . \, b_1, \, \ldots, \quad L \, . \, a_m = L \, . \, b_m,$$

oder

$$L \, . \, (a_1 - b_1) = 0 \, , \, \ldots, \quad L \, . \, (a_m - b_m) = 0 \, ,$$

das heisst, die Grössen $(a_1 - b_1), \ldots, (a_m - b_m)$ sind dem Leitsysteme untergeordnet. Es sind aber diese Grössen sowohl von einander, als 245
von dem Systeme des Vereins A unabhängig. Denn fände eine solche Abhängigkeit statt, so würde auch eine Vielfachensumme von $a_1, \ldots a_m$ und den andern Grössen erster Stufe, die dem Vereine A angehören, als gleich erscheinen einer Vielfachensumme der Grössen $b_1, \ldots b_m$, das heisst, es würde in dem Systeme $b_1 \, . \, b_2 \ldots b_m$ eine Grösse geben, welche den Systemen beider Vereine gemeinschaftlich wäre, das heisst, dem Systeme C angehörte, was wider die Voraussetzung ist, indem jenes Produkt von C unabhängig angenommen ist. Da nun die Grössen $(a_1 - b_1), \ldots, (a_m - b_m)$ von einander unabhängig und dem Systeme L untergeordnet sind, so ist auch ihr äusseres Produkt diesem Systeme untergeordnet; und wenn wir annehmen, dass das Leitsystem nicht von höherer als m-ter Stufe ist, so folgt, dass es durch jenes | Pro- 244
dukt dargestellt, also vollkommen bestimmt ist, oder mit andern Worten, es ist dann der Sinn der Abschattung bestimmt. Setzen wir daher L jenem Produkte gleich, so folgt auch umgekehrt die Gültigkeit der Gleichungen

$$L \, . \, a_1 = L \, . \, b_1, \, \ldots,$$

und da L von dem Systeme von A unabhängig ist, so folgt, dass $a_1, \ldots a_m$ in der That die Abschattungen von $b_1, \ldots b_m$ auf das System von A nach dem Leitsysteme L sind. Nimmt man nun in dem Systeme von B irgend eine andere Grösse erster Stufe b an, so wird sich dieselbe als Vielfachensumme von den Grössen $b_1, \ldots b_m$ und von Grössen, die dem Systeme C angehören, darstellen lassen. Dann wird die entsprechende Grösse a des ersten Vereins sich als entsprechende Vielfachensumme von den entsprechenden Grössen ihres Vereins darstellen lassen, das heisst, als entsprechende Vielfachensumme von den Abschattungen jener Grössen erscheinen, oder, sie selbst ist die Abschattung jener ersteren. Wir haben somit den Satz gewonnen:

Wenn zwischen den Grössen erster Stufe eines Vereins (A) *dieselben Zahlenrelationen stattfinden, welche zwischen den entsprechenden Grössen erster Stufe eines andern Vereins* (B) *herrschen: so ist der erste Verein* (A) *dann und nur dann als Abschattung des zweiten* (B) *aufzufassen, wenn in dem gemeinschaftlichen Systeme beider Vereine die entsprechenden Grössen zusammenfallen; und zwar ist dann der Sinn der Abschattung vollkommen bestimmt.*

Als unmittelbare Folgerung aus diesem Satze geht hervor, „dass 246 von zwei affinen Vereinen dann und nur dann der eine als Abschattung des andern erscheint, wenn in dem gemeinschaftlichen Systeme beider Vereine je zwei entsprechende Grössen zusammenfallen, und dass dann jeder von beiden Vereinen als Abschattung des andern aufgefasst werden kann.

§ 159. **Affinität in der Geometrie.**

Um die gewonnenen Resultate durch geometrische Anschauungen zu verdeutlichen, wird es genügen, affine Vereine beiderlei Art in der Ebene zu betrachten.

Es ist klar, wie man dann zu drei nicht in gerader Linie liegenden Punktgrössen (die aber auch in Strecken übergehen können) drei beliebige ebenfalls nicht in gerader Linie liegende Punktgrössen als entsprechende annehmen, und daraus zwei einander direkt affine Ver-
245 eine ableiten kann, indem man die | aus jenen entsprechenden Grössen auf gleiche Weise gebildeten Vielfachensummen, oder deren auf gleiche Weise gebildete Produkte als entsprechende Grössen setzt. Ebenso erhält man zwei reciprok affine Vereine, wenn man zu drei Elementargrössen erster Stufe, die nicht in gerader Linie liegen, drei Liniengrössen, deren Linien ein Dreieck begränzen, als entsprechende annimmt, und ausserdem je zwei durch dieselben Grundverknüpfungen aus ihnen erzeugte Grössen als entsprechende setzt.

Es ist aus dem Früheren klar, wie im ersten Falle dreien Punktgrössen des einen Vereins, die in gerader Linie liegen, auch drei des andern entsprechen, die gleichfalls in gerader Linie liegen, und ebenso dreien Liniengrössen des einen, die durch Einen Punkt gehen, drei des andern entsprechen, welche gleichfalls durch Einen Punkt gehen; wie ferner im zweiten Falle dreien Punktgrössen des einen Vereins, die in Einer geraden Linie liegen, drei Liniengrössen des andern entsprechen, die durch Einen Punkt gehen, und umgekehrt. Dabei ist jedoch festzuhalten, dass die Punktgrössen auch in Strecken, die Liniengrössen in Flächenräume umschlagen können.

§ 160. **Lineäre Verwandtschaft, Kollineation und Reciprocität nach dem Princip der gleichen Zeiger.**

Unsere bisherige Betrachtungsweise unterscheidet sich von der gewöhnlichen geometrischen Anschauungsweise dadurch, dass wir die Punkte nicht für sich, sondern behaftet mit gewissen Zahlenkoefficienten, die wir Gewichte nannten, auffassten; und dies war nothwendig, damit sie eben als Grössen erscheinen konnten. Der Punkt selbst erschien

entweder als solche Grösse mit dem | Gewichte Eins, oder als System, 247
dem die Grösse angehörte. Ebenso mussten die Linie, die Ebene, der Raum, wenn sie als Grössen erscheinen sollten, einen bestimmten Masswerth darbieten, und so als Liniengrösse, Plangrösse und begränzter Körperraum aufgefasst werden.

Es ist besonders die erste Betrachtungsweise (der Punkte als Grössen), welche von der gewöhnlichen gänzlich abweicht. Es bleibt uns daher jetzt noch besonders übrig, für die in diesem Kapitel dargestellten Gesetze jene Differenz auszugleichen.

Wir knüpfen diese Betrachtung an die allgemeine Verwandtschaft der Affinität, und nennen zunächst die entsprechenden Systeme zweier affiner Vereine *lineär verwandt*, und zwar, wenn jene Vereine direkt affin sind, so nennen wir die Vereine ihrer Systeme *kollinear verwandt*, und wenn sie reciprok affin sind, *reciprok verwandt*; oder um diese
Begriffe | sogleich auf die Geometrie zu übertragen: wenn zwei Ver- 246
eine von Grössen (Elementargrössen, Liniengrössen, Plangrössen) in direkter oder reciproker Affinität stehen, so nennen wir die Vereine der ihnen zugehörigen Systeme (Punkte, Linien, Ebenen) kollinear oder reciprok verwandt. Wir haben nun nachzuweisen, dass diese Begriffe mit den sonst unter den aufgeführten Namen verstandenen Begriffen zusammen fallen.

Möbius, der Begründer dieser allgemeinen Verwandtschaftstheorie, stellt als den Begriff der Kollineation auf*), dass bei zwei ebenen oder körperlichen Räumen, welche in dieser Verwandtschaft stehen, jedem Punkte des einen Raumes ein Punkt in dem andern Raume dergestalt entspricht, dass, wenn man in dem einen Raume eine beliebige Gerade zieht, von allen Punkten, welche von dieser Geraden getroffen werden, die entsprechenden Punkte des andern Raumes gleichfalls durch eine Gerade verbunden werden können. Hieraus folgt vermöge der in den vorigen Paragraphen dargelegten Gesetze, dass in der That die Systeme, welche den entsprechenden Grössen zweier direkt affiner Vereine zugehören, zwei kollineare Vereine in dem von Möbius dargestellten Sinne bilden; aber auch umgekehrt lässt sich zeigen, dass, wenn zwei Räume in diesem Sinne als kollinear verwandt erscheinen, die entsprechenden Punkte auch mit solchen Gewichten behaftet werden
können, dass die Vereine | der so gebildeten Grössen einander affin 248
sind; oder mit andern Worten, dass zwei Räume, welche nach dem Princip der gleichen Konstruktionen einander kollinear sind, es auch nach dem Princip der gleichen Zeiger sind.

*) in seinem barycentrischen Kalkül, § 217 [ges. Werke, Bd. I, S. 266].

§ 161, 162. Kollineation nach dem Princip der gleichen Zeiger und nach dem Princip der gleichen Konstruktion. Identität beider Begriffe.

§ 161.

Um dies zuerst für die Ebene zu beweisen, nehme man irgend vier Punkte in der einen Ebene an, von denen keine drei in gerader Linie liegen, und ebenso in der andern auch vier solche Punkte, und setze sie einander entsprechend, was nach dem Princip der gleichen Konstruktionen verstattet ist, weil der vierte Punkt von den drei ersten durch keine lineäre Konstruktion abhängt: Nun kann man in jeder Ebene dreien von den Punkten solche Gewichte hinzufügen, dass der vierte Punkt als Summe der so gebildeten drei Elementargrössen erscheint; denn wenn man nur jene drei Punkte als Richtelemente annimmt, so sind die drei Richtstücke des vierten Punktes die verlangten
247 Elementargrössen; nimmt man nun diese drei Paare von Elementargrössen als einander entsprechende Grössen zweier affiner Vereine an, so sind auch die beiden vierten Punkte entsprechende Grössen derselben Vereine. Nun erhält man nach dem Princip der gleichen lineären

Fig. 15.

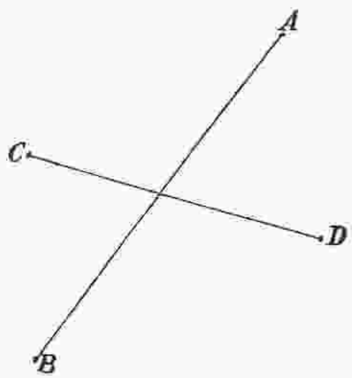
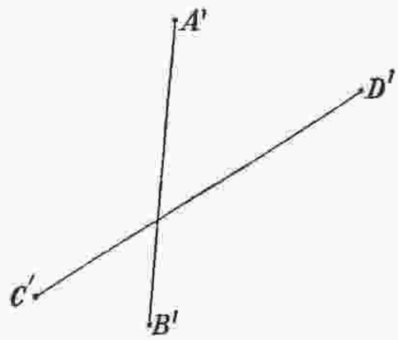


Fig. 16.



Konstruktion aus vier entsprechenden Punktenpaaren $ABCD$ und $A'B'C'D'$ zweier kollinearer ebenen Räume (Fig. 15 u. 16) ein neues Paar durch das Kreuzen der entsprechenden Linien AB und CD einerseits, und $A'B'$ und $C'D'$ andererseits, indem der eine Kreuzpunkt, da er zweien Geraden des einen Vereines angehört, auch als entsprechenden Punkt denjenigen Punkt haben muss, welcher den entsprechenden Geraden des andern Vereines angehört, also den Kreuzpunkt beider Geraden. Sind nun die zu jenen Elementen gehörigen Elementargrössen a, b, c, d und a', b', c', d' einander affin, so sind es auch die Produkte $ab\,.\,cd$ und $a'b'\,.\,c'd'$ (§ 157), und die Elemente dieser Produkte, das heisst, die oben bezeichneten Kreuzpunkte, sind also dann auch nach dem Princip der gleichen Zeiger einander kollinear. Also je zwei Elemente, welche in der Ebene sich als entsprechende nach dem Princip der gleichen Konstruktion nachweisen lassen, sind es auch nach dem Princip der gleichen Zeiger.

§ 162.

Entsprechend lässt sich der Satz für Körperräume nachweisen, indem man dann nur statt jener vier Punktenpaare | fünf solche nimmt, 249
von denen keine vier in Einer Ebene liegen. Dann zeigt sich, wie nach dem Princip der gleichen Konstruktion jeden vier Punkten des einen Vereins, welche in Einer Ebene liegen, auch vier Punkte des andern entsprechen müssen, welche gleichfalls in Einer Ebene liegen.

Denn vier Punkte, welche in derselben Ebene liegen, müssen sich so verbinden lassen, dass ihre Verbindungslinien sich kreuzen; diesem Kreuzpunkte muss dann auch ein Kreuzpunkt der entsprechenden Verbindungslinien des andern Raumes entsprechen, also müssen auch diese Verbindungslinien, also auch die Punkte, welche durch sie verbunden werden, in Einer Ebene liegen. Sind nun A, B, C, D, E und A', B', C', D', E' die fünf entsprechenden Punktenpaare, so wird nach dem Princip der gleichen Konstruktion dem Durchschnitte der Ebene ABC mit der geraden Linie DE der Durchschnitt von $A'B'C'$ mit $D'E'$ entsprechen.

Nun können wir ganz auf dieselbe Weise, wie vorher, den fünf Punktenpaaren solche Gewichte geben, dass die so entstehenden Elementargrössen a, b, c, d, e | und a', b', c', d', e' einander affin werden, 248
indem man nur in jedem Vereine einen jener Punkte als Vielfachensumme der übrigen desselben Vereins darzustellen, und diese Vielfachen als die entsprechenden Elementargrössen zu setzen braucht. Dann sind nach § 157 auch die Produkte $abc\,.\,de$ und $a'b'c'\,.\,d'e'$ einander entsprechende Grössen jener affinen Vereine; die Elemente dieser Produkte, das heisst, die oben bezeichneten Durchschnittspunkte, sind also dann auch nach dem Princip der gleichen Zeiger einander kollinear entsprechend.

Somit wieder, wenn irgend fünf Elemente des einen Vereines nach beiden Principien fünf Elementen des andern entsprechen, so wird auch jedes sechste Elementenpaar, was nach dem Princip der gleichen Konstruktion sich als entsprechendes nachweisen lässt, sich auch nach dem Princip der gleichen Zeiger als solches nachweisen lassen.

Es ist also in der That die Identität beider Principien für ebene sowohl als körperliche Räume nachgewiesen. Bei Punkten einer geraden Linie reicht das Princip der gleichen Konstruktionen nur dann aus, wenn man mit den Konstruktionen aus der geraden Linie herausgeht, und also ein entsprechendes Punktenpaar ausserhalb derselben annimmt; das Princip der gleichen Zeiger | hat hingegen auch dann noch, 250
wie überhaupt immer, seine direkte Anwendung.

§ 163. Identität der Reciprocität nach beiden Principien.

Nach dem Princip der gleichen Konstruktion nennen wir zwei Vereine einander reciprok, wenn jedem Punkte des ersten Vereins eine Gerade des andern dergestalt entspricht, dass, wenn man in der Ebene des ersten Vereines eine Gerade zieht, von allen Punkten, welche in dieser Geraden liegen, die entsprechenden Geraden des andern Vereines durch einen Punkt gehen, und umgekehrt zu allen Geraden des zweiten Vereines, welche durch denselben Punkt gezogen werden können, die entsprechenden Punkte des ersten in einer geraden Linie liegen.

Ebenso werden zwei räumliche Vereine einander nach dem Princip der gleichen Konstruktion reciprok sein, wenn die Ebenen des zweiten Vereins, welche den sämmtlichen Punkten einer Geraden im ersten entsprechen, sich in einer und derselben Geraden schneiden, und umgekehrt die Punkte des ersten Vereins, welche den sämmtlichen Ebenen [entsprechen], die durch dieselbe gerade Linie gehen und dem zweiten Vereine angehörig gedacht werden, sich durch eine gerade Linie verbinden lassen.

Es bedarf kaum noch einer Auseinandersetzung, dass die auf
249 diese Weise | reciproken Gebilde es auch nach dem Princip der gleichen Zeiger sind, indem sich dies genau auf dieselbe Weise ergiebt, wie es sich oben für die Kollineation ergab.

§ 164. Identität des Affinitätsbegriffes nach beiden Principien für Punktvereine.

Setzen wir drei Punkte, die nicht in einer geraden Linie liegen, entsprechend mit drei Punkten, die auch nicht in gerader Linie liegen, und bilden daraus durch gleiche Zeiger zwei Vereine entsprechender Grössen: so wird das Gewicht einer jeden Grösse die Summe ihrer drei Zeiger, also das Gewicht zweier entsprechender Grössen dasselbe sein; es erscheinen also auch die Punkte selbst überall als entsprechende Grössen, und es herrscht also zwischen den Vereinen der entsprechenden Punkte selbst Affinität. Daraus folgt, dass, wenn a, b, c drei in gerader Linie liegende Punkte, a', b', c' drei ihnen entsprechende Punkte eines affinen Punktgebildes sind, dann nicht nur auch a', b', c' in gerader Linie liegen, sondern auch die zwischen ihnen befindlichen Abschnitte proportional sein müssen, denn wenn

$$ab = mbc,$$

251 ist, wo m eine Zahl vorstellt, so wird auch nach dem allgemeinen Gesetz der Affinität

$$a'b' = mb'c'$$

sein, und nach der Annahme sollten auch a', b', c' Punkte sein, wenn a, b, c es waren. Es fällt somit unser Begriff der Affinität mit dem sonst üblichen Begriff derselben zusammen, sobald er auf dieselben Grössen, nämlich auf blosse Punkte (mit gleichen Gewichten) angewandt wird.

Die Erzeugung affiner Punktvereine tritt noch klarer hervor, wenn wir Parallelkoordinaten zu Grunde legen, oder nach unserer Benennungsweise, wenn wir zu einem Punkt und zwei Strecken des einen Vereins in dem andern Vereine einen Punkt und zwei Strecken als entsprechende setzen, und dann die entsprechenden Grössen durch gleiche Zeiger erzeugen: dann wird das Gewicht dieser Grössen gleich dem zu jenem Punkte gehörigen Zeiger sein, und also gleich Eins erscheinen, wenn jener Zeiger der Einheit gleich wird. Zieht man somit in dem einen Gebilde von einem Punkte aus zwei Strecken, und in dem andern von dem entsprechenden Punkte aus zwei entsprechende Strecken, und setzt diese Strecken als Richtmasse für die Richtstücke der demselben Gebilde zugehörigen Punkte, so haben die entsprechenden Punkte beider Vereine stets gleiche Gewichte; und zugleich sind dadurch aus drei Paaren entsprechender | Punkte alle übrigen entsprechenden Punkten- 250
paare zweier affiner Punktgebilde bestimmt.

§ 165. **Die metrischen Relationen zweier kollinearer Punktgebilde.**

Was die metrischen Relationen zweier kollinearer Punktgebilde betrifft, so sind diese auf eine höchst einfache Weise dadurch ausgedrückt, dass

jede Grundgleichung, welche unabhängig ist von den Masswerthen der darin vorkommenden Grössen, bestehen bleibt, wenn man statt der Grössen die entsprechenden eines kollinearen Vereines setzt.

Nämlich, da man diese Masswerthe auch so setzen kann, dass beide Vereine von Grössen affin werden, und für affine Grössenvereine die Geltung dieses Satzes erwiesen ist, so gilt er nun unter jener Voraussetzung auch für kollineare Vereine.

Eine specielle Folgerung dieses allgemeinen Satzes, welcher die metrischen Relationen, welche zwischen kollinearen Gebilden herrschen, in ihrer ganzen Vollständigkeit umfasst, ist zum Beispiel die, dass jeder Doppelquotient | zwischen vier Grössen A, B, C, D, welcher 252
einen Zahlenwerth darstellt, auch denselben Zahlenwerth behält, wenn man statt A, B, C, D die entsprechenden Grössen A', B', C', D' eines kollinear verwandten Gebildes setzt; nämlich ein solcher Doppelquotient, da er sich in der Form

$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DA} = m$$

darstellen lässt, ist unabhängig von dem Masswerthe der vier Grössen A, B, C, D, weil jede im Zähler und Nenner einmal vorkommt, folglich wird, wenn man diesen gleich einer Zahl m setzt, diese Gleichung auch fortbestehen, wenn man statt der Grössen A, B, C, D die ihnen kollinear entsprechenden Grössen A', B', C', D' setzt, und man hat somit

$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DA} = \frac{A'B'}{B'C'} \cdot \frac{C'D'}{D'A'}.$$

Namentlich hat man, wenn a, b, c, d Punkte einer geraden Linie sind, und a', b', c', d' die entsprechenden,

$$\frac{ab}{bc} \cdot \frac{cd}{da} = \frac{a'b'}{b'c'} \cdot \frac{c'd'}{d'a'}.$$

Ebenso ist, wenn A eine Linie, b, c, d aber Punkte sind, welche mit A in derselben Ebene liegen und selbst unter einander in derselben geraden Linie liegen,

251 $$\frac{bA}{Ac} \cdot \frac{cd}{db} = \frac{b'A'}{A'c'} \cdot \frac{c'd'}{d'b'}.$$

Ferner, wenn A und C gerade Linien, b und d Punkte sind, und A, C, b, d in derselben Ebene liegen, so ist

$$\frac{Ab}{bC} \cdot \frac{Cd}{dA} = \frac{A'b'}{b'C'} \cdot \frac{C'd'}{d'A'}.$$

Ferner, wenn A und C Ebenen, b und d Punkte sind, so ist

$$\frac{Ab}{bC} \cdot \frac{Cd}{dA} = \frac{A'b'}{b'C'} \cdot \frac{C'd'}{d'A'}.$$

Endlich, wenn A, B, C, D Linien im Raume sind, so ist

$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DA} = \frac{A'B'}{B'C'} \cdot \frac{C'D'}{D'A'}.$$

Die hinzugefügten Bedingungen entsprechen nämlich der in dem allgemeineren Satze hinzugefügten Bedingung, dass der Doppelquotient eine Zahl darstellen soll.

§ 166. Zusammenhang zwischen Kollineation und Projektion. (Perspektivität).

253 Wie sich nun die Kollineation zur Affinität verhält, so verhält sich die Projektion zur Abschattung, indem, wie wir oben zeigten, bei Elementargrössen das System der Abschattung die Projektion darstellte. Es werden also auch alle Grundgleichungen, welche von dem Masswerthe ihrer Grössen unabhängig sind, bestehen bleiben, wenn man statt der Grössen ihre Projektionen setzt; namentlich werden auch jene Doppelquotienten bei der Projektion denselben Werth beibehalten.

Wie ferner die durch Abschattung aus einander erzeugbaren Vereine eine besondere Art der Affinität darstellten, so werden nun auch die durch Projektion aus einander erzeugbaren Vereine eine besondere Art der Kollineation darstellen, und zwar können wir, wenn wir die durch Projektion aus einander erzeugbaren Vereine *perspektivische* nennen, den Satz aufstellen:

Zwei kollineare Vereine sind dann und nur dann perspektivisch, wenn in dem Durchschnitte der beiden Systeme, dem jene Vereine angehören, je zwei entsprechende Punkte zusammenfallen, und der Sinn der Projektion ist dann bestimmt.

Dieser Satz ist eben nur eine Uebertragung des in § 158 für die Abschattung aufgestellten Satzes. Namentlich folgt daraus auch, dass zwei kollineare Linien, welche nicht in Einer Ebene liegen, stets perspektivisch sind, weil sie sich nicht schneiden. Endlich wird in demselben Falle, in welchem die kollinearen Vereine zugleich | affin werden, 252
die Projektion mit der Abschattung identisch werden; nämlich, wenn die Abschattung und die abgeschattete Grösse Punkte oder überhaupt Elementargrössen erster Stufe mit gleichen Gewichten darstellen. Dies wird der Fall sein, wenn das Leitsystem ein Ausdehnungssystem ist (oder anders ausgedrückt, als Elementarsystem ins Unendliche fällt). Dieser Fall trat im ersten Abschnitte (§ 82) ein, weshalb dort Projektion und Abschattung zusammenfielen.

§ 167. **Harmonische Gleichungen, Konstruktion der harmonischen Mitte. Harmonische Summe, harmonische Koefficienten. Polsystem.**

Fragen wir überhaupt danach, welche Gleichungen unabhängig sind von dem Masswerthe der Grössen geltender Stufe, die darin vorkommen, und welche also in der Projektion und überhaupt in der Kollineation bestehen bleiben, so sind es diejenigen, bei welchen jede Grösse von geltender Stufe in demselben Gliede eben so oft als Faktor des Nenners vorkommt, wie als Faktor des Zählers, und nur diejenigen Faktoren, welche sämmtlichen Zählern | oder Nennern gemeinschaft- 254
lich sind, können in den Gliedern beliebig oft vorkommen, wenn nur in allen gleich oft.

Die einfachste Form einer solchen Gleichung ist daher

$$\frac{\alpha QA}{PA} + \frac{\beta QB}{PB} + \cdots = 0,$$

wo $\alpha, \beta, \ldots$ Zahlengrössen vorstellen, und wobei wir, damit die Gleichung einen bestimmten Sinn gewinne, annehmen müssen, dass die Nenner PA, PB, ... einander gleichartig sind, ohne null zu werden.

Setzen wir dies voraus, und nehmen wir Q gleich der Einheit, wodurch die Gleichung übergeht in

$$\frac{\alpha A}{PA} + \frac{\beta B}{PB} + \cdots = 0,$$

so nennen wir dieselbe eine harmonische Gleichung, α, β, ... die *harmonischen Koefficienten* (harmonischen Gewichte), die Systeme von A, B, ... die *harmonischen Systeme*, P das *Polsystem*. Verstehen wir unter A, B, ... blosse Systeme, so schreiben wir die Gleichung auch so:

$$\overset{P}{\alpha A + \beta B + \cdots = 0},$$

und sagen, der Ausdruck $\alpha A + \beta B + \cdots$ sei in Bezug auf P gleich Null.

Die Bedingung, dass die Grössen PA, PB, ... alle einander gleichartig sein müssen, ohne null zu werden, können wir auch so ausdrücken, dass für alle diese Produkte das nächstumfassende System
253 und das gemeinschaftliche System der Faktoren dieselben sein müssen. Wenn das nächstumfassende System in allen dasselbe sein soll, so heisst das, es muss dasselbe zusammenfallen mit demjenigen Systeme, was die sämmtlichen Grössen P, A, B, ... zunächst umfasst, das heisst, mit dem Hauptsysteme der Gleichung. Wenn das gemeinschaftliche System in einem jener Produkte, also auch in allen von nullter Stufe ist, so sind die Produkte äussere, und dann, aber auch nur dann sind die Werthe der Quotienten $\frac{\alpha A}{PA}$, ... bestimmte Grössen (§ 141). In diesem Falle nennen wir die harmonische Gleichung *eine harmonische von reiner Form*. Aber obgleich in dem andern Falle die Quotienten $\frac{\alpha A}{PA}$ nur partiell bestimmte Werthe darstellen, so behält die harmo-
255 nische Gleichung | dennoch auch dann ihre bestimmte Bedeutung, welche wir nun aufsuchen wollen.

Da PA, PB, ... einander gleichartig sind, ohne null zu werden, so müssen sich solche Masswerthe von A, B, ... annehmen lassen, dass

$$PA = PB = \cdots$$

ist; dann wird die Gleichung in der Form

$$\frac{\alpha A + \beta B + \cdots}{PA} = 0$$

erscheinen, woraus man durch Multiplikation mit PA die absolute Gleichung

$$\alpha A + \beta B + \cdots = 0$$

erhält. Multiplicirt man diese Gleichung mit P, so erhält man

$$(\alpha + \beta + \cdots)\, AP = 0,$$

das heisst

$$\alpha + \beta + \cdots = 0,$$

oder:

in einer harmonischen Gleichung ist die Summe der harmonischen Koefficienten auf beiden Seiten gleich.

Zugleich erhält man hierdurch ein Mittel, um den Werth σS, welcher der Gleichung

$$\overset{P}{\alpha A + \beta B + \cdots = \sigma S}$$

genügt, zu konstruiren, das heisst, den harmonischen Koefficienten und das harmonische System dieses Gliedes zu finden; nämlich, erstens ist

$$\sigma = \alpha + \beta + \cdots,$$

zweitens ist, wenn A, B, ... so gross gemacht sind, dass die Pro- 254
dukte mit P einander gleich sind, und auch S in solcher Grösse an-
genommen wird, nach dem Vorigen

$$\alpha A + \beta B + \cdots = \sigma S$$

oder

$$S = \frac{\alpha A + \beta B + \cdots}{\sigma},$$

wodurch S selbst, wenn nicht etwa σ null ist*), bestimmt, also | auch 256
das System von S bestimmt, die Bedeutung der harmonischen Gleichung
somit nachgewiesen ist.

Wir nennen das System von S die *harmonische Mitte* zwischen den Systemen A, B, ... in Bezug auf die zugehörigen Koefficienten α, β, ... und das Polsystem P, und dies System, verbunden mit dem harmonischen Koefficienten $(\alpha + \beta + \cdots)$, nennen wir die auf P bezügliche *harmonische Summe* von αA, βB, ...

§ 168. **Umgestaltung reiner harmonischer Gleichungen.**

Im vorigen Paragraphen haben wir gezeigt, dass eine harmonische Gleichung auch als absolute besteht, wenn man den Systemen solche Masswerthe beilegt, dass ihre Produkte mit dem Polsysteme einander gleich werden. Wir können nun auch umgekehrt schliessen und sagen, *eine Gleichung zwischen Vielfachensummen von Grössen, deren Produkte mit einer und derselben Grösse P gleichen Werth liefern, sei eine har-*

---

*) Ist σ null, und auch $\alpha A + \beta B + \cdots = 0$, so ist S gänzlich unbestimmt, wie dies auch in der Idee der harmonischen Gleichung liegt. Ist σ null, und $\alpha A + \beta B + \cdots$ stellt einen geltenden Werth dar, so giebt es keinen (endlichen) Werth von S, welcher der Gleichung genügt; da dann auch $(\alpha A + \beta B + \cdots) P$ gleich Null ist, so ist klar, dass das System, was jener Summe entspricht, auch nicht der Bedingung, mit P ein Produkt von geltendem Werthe zu liefern, genügt.

monische, wenn man die Koefficienten jener Grössen als harmonische Koefficienten der durch sie dargestellten Systeme, das System von P aber als Polsystem setzt.

In der That, ist

$$\alpha A + \beta B + \cdots = \sigma S$$

die gegebene Gleichung, und ist

$$PA = PB = \cdots = PS,$$

so erhält man, indem man mit PS dividirt, und links, statt die Summe zu dividiren, die Stücke dividirt, indem man dann statt PS die ihm gleichen Ausdrücke setzt, die harmonische Gleichung

255 $$\frac{\alpha A}{PA} + \frac{\beta B}{PB} + \cdots = \frac{\sigma S}{PS},$$

oder

$$\alpha A + \beta B + \cdots \overset{P}{=} 0,$$

wo A, B, ... nur noch blosse Systeme vorstellen.

Durch diese Sätze ergeben sich nun leicht die Umwandlungen, welcher eine harmonische Gleichung, welche in reiner Form erscheint, fähig ist.

Zuerst leuchtet unmittelbar ein, dass man einestheils die sämmtlichen harmonischen Systeme, anderntheils das Polsystem mit einem
257 Systeme L äusserlich kombiniren darf, welches von dem | Hauptsysteme der ursprünglichen Gleichung unabhängig ist, ohne dass die Gleichung aufhört, eine harmonische zu sein. Denn, wenn

$$\alpha A + \beta B + \cdots = 0$$

und

$$PA = PB = \cdots$$

ist, so ist klar, dass, wenn L von PA unabhängig ist und PA, wie wir voraussetzten, ein äusseres Produkt ist, auch

$$LPA = LPB = \cdots$$

sei, also auch LP als Polsystem angenommen werden könne, dass ferner

$$\alpha AL + \beta BL + \cdots = 0$$

und

$$PAL = PBL = \cdots$$

sei, also diese mit L kombinirte Gleichung noch in Bezug auf dasselbe Polsystem P eine harmonische sei.

Ohne Vergleich wichtiger als diese Umwandlungen sind diejenigen, bei welchen man nicht aus dem Hauptsysteme der ursprünglichen Gleichung herausgeht. Setzt man nämlich P gleich $Q \,.\, R$, sei es nun, dass $Q \,.\, R$ ein äusseres, oder dass es ein, auf das Hauptsystem der

Gleichung bezügliches, eingewandtes Produkt darstelle, so wird, da $P.A$ als äusseres oder auch als eingewandtes Produkt nullter Stufe betrachtet werden kann, das Produkt $Q.R.A$ ein reines, also (nach § 139) gleich $Q.(R.A)$ sein. Multiplicirt man daher die ursprüngliche Gleichung

$$\alpha A + \beta B + \cdots = 0,$$

zu welcher die Bedingungsgleichungen

$$P.A = P.B = \cdots,$$ 256

oder

$$Q.(R.A) = Q.(R.B) = \cdots$$

gehören, mit R, so erhält man

$$\alpha RA + \beta RB + \cdots = 0,$$

welche vermöge der Bedingungsgleichungen in Bezug auf Q harmonisch ist. Also:

Stellt man das Polsystem einer ***reinen*** *harmonischen Gleichung als Kombination dar, sei es als äussere, oder als eingewandte auf das Hauptsystem der Gleichung bezügliche: so bleibt die Gleichung eine reine harmonische, wenn man das | eine Glied jener Kombination mit den harmoni-* 258
schen Systemen kombinirt, das andere als Polsystem setzt, alles übrige aber unverändert lässt.

Um die Allgemeinheit dieses Satzes und den Reichthum der Beziehungen zu übersehen, welchen er in sich fasst, haben wir auch diejenigen harmonischen Gleichungen in Betracht zu ziehen, welche nicht in reiner Form erscheinen.

§ 169. Umwandlung des Polsystems einer harmonischen Gleichung.

Ist die Gleichung

$$\alpha A + \beta B + \cdots = 0$$

mit den Bedingungsgleichungen

$$PA = PB = \cdots$$

gegeben, und sind die Produkte $PA, \ldots$ eingewandte, so lässt sich die harmonische Gleichung, welche daraus hervorgeht, in reiner Form darstellen. In der That, wenn E das System darstellt, welches den Faktoren eines jeden dieser Produkte gemeinschaftlich ist, so wird P sich als äusseres Produkt in der Form QE darstellen lassen, und man hat

$$PA = QE.A = QA.E;$$

also gehen die Bedingungsgleichungen über in

$$QA.E = QB.E = \cdots,$$

oder, da E dem $QA, \ldots$ untergeordnet ist, in

$$QA = QB = \cdots,$$

wo $QA, \ldots$ äussere Produkte sind; und die Gleichung ist also auch harmonisch in Bezug auf Q, das heisst

$$\alpha A + \beta B + \cdots \overset{Q}{=} 0,$$

257 und sie ist nun in reiner Form dargestellt.

Also „eine unreine harmonische Gleichung bietet stets ein System (E) dar, welches den sämmtlichen harmonischen Systemen und dem Polsysteme derselben (P) gemeinschaftlich ist, und man kann die Gleichung in reiner Form darstellen, indem man als Polsystem irgend ein System (Q) setzt, dessen äussere Kombination mit jenem gemeinschaftlichen Systeme (E) das ursprüngliche Polsystem (P) liefert."

Da man nun aus den zuletzt gefundenen Bedingungsgleichungen

$$QA = QB = \cdots$$

für den Fall, dass $A, B, \ldots$ das gemeinschaftliche System E haben,
259 und E_1 dem E untergeordnet ist, die neuen Bedingungsgleichungen

$$QA \,.\, E_1 = QB \,.\, E_1 = \cdots,$$

oder, da E_1 auch dem $A, B, \ldots$ untergeordnet ist, die Bedingungsgleichungen

$$QE_1 \,.\, A = QE_1 \,.\, B = \cdots$$

ableiten kann, so folgt, dass dieselbe Gleichung auch noch harmonisch ist in Bezug auf QE_1. Daraus folgt, dass man in einer reinen harmonischen Gleichung das Polsystem mit einem Systeme, welches allen harmonischen Systemen untergeordnet ist, kombiniren und diese Kombination als Polsystem setzen kann, oder allgemeiner:

Wenn die harmonischen Systeme einer Gleichung ein System von geltender Stufe gemeinschaftlich haben, so kann man das Polsystem beliebig ändern, wenn nur dasjenige System, welches jenes gemeinschaftliche System und dieses Polsystem zunächst umfasst, dasselbe bleibt.

Nehmen wir ferner an, dass in einer reinen harmonischen Gleichung das Polsystem demjenigen Systeme R, was die sämmtlichen harmonischen Systeme zunächst umfasst, nicht untergeordnet sei, sondern mit ihm nur ein System E gemeinschaftlich habe und sich also in der Form QE darstellen lasse, wo Q von jenem nächstumfassenden Systeme unabhängig ist, so kann man statt der Bedingungsgleichungen

$$QEA = QEB = \cdots$$

auch, da Q von dem Systeme, welches die Faktoren $EA, EB, \ldots$

zunächst umfasst, unabhängig ist, nach § 81 mit Weglassung des Faktors Q die Gleichungen

$$EA = EB = \cdots$$ 258

setzen, das heisst, die Gleichung ist auch harmonisch in Bezug auf E; da man nun nach § 168 auch E wieder mit jedem von R unabhängigen Systeme äusserlich kombiniren darf, so haben wir den Satz:

Man kann in einer reinen harmonischen Gleichung das Polsystem beliebig in der Art ändern, dass dasjenige System, welches es mit dem, alle harmonischen Systeme zunächst umfassenden Systeme gemeinschaftlich hat, dasselbe bleibt.

Dieser Satz entspricht dem vorhergehenden und lässt sich, wenn 260
man will, in die ganz entsprechende Form kleiden. Auch übersieht man leicht, wie man durch Kombination dieser beiden Gesetze ein allgemeineres Gesetz ableiten könnte, welches jedoch wegen seiner verwickelten Form von geringerer Bedeutung ist *).

§ 170. Umwandlung harmonischer Gleichungen bei unverändertem Polsysteme. Allgemeiner Satz über harmonische Mitten.

Vermittelst dieser Sätze nun können wir den Satz aus § 168 noch in einer etwas einfacheren und für die Anwendung bequemeren Form darstellen.

Nämlich, wenn wir die dort gewählte Bezeichnung wieder aufnehmen, so können wir in der harmonischen Gleichung

$$\overset{Q}{\alpha RA + \beta RB + \cdots = 0}$$

nach den beiden Sätzen des vorigen Paragraphen statt Q auch QR, das heisst P setzen, und haben somit den Satz:

In einer reinen harmonischen Gleichung kann man ohne Aenderung des Polsystems die harmonischen Glieder mit jedem, dem Polsystem eingeordneten Systeme kombiniren.

In diesem Satze liegen die sämmtlichen Sätze über die harmonischen Mitten (*centres de moyennes harmoniques*), welche Poncelet aufgestellt hat **).

---

*) Es würde dies Gesetz etwa so ausgedrückt werden können: Wenn man ein veränderliches Polsystem mit dem die harmonischen Systeme zunächst umfassenden Systeme kombinirt, und dabei dasjenige System, welches diese Kombination und das allen harmonischen Systemen gemeinschaftliche System zunächst umfasst, konstant bleibt, so bleibt die harmonische Gleichung als solche in Bezug auf jenes veränderliche Polsystem bestehen.

**) In seinem *Mémoire sur les centres de moyennes harmoniques*, welches im

In der That, hat man zum Beispiel in einer Ebene die harmonische
259 Mitte mehrerer Linien in Bezug auf gewisse harmonische Koefficienten und einen Punkt der Ebene als Pol, und man zieht durch diesen Punkt eine gerade Linie, so wird zwischen den Durchschnittspunkten dieser Linie mit den ersteren nach dem zuletzt angeführten Satze in Bezug auf denselben Pol auch dieselbe harmonische Gleichung herr-
261 schen; oder, anders ausgedrückt, wenn | man durch einen festen Punkt eine veränderliche Gerade zieht, welche eine Reihe von n festen Geraden derselben Ebene schneidet, und man bestimmt in Bezug auf jenen Punkt als Pol die harmonische Mitte zwischen den mit konstanten harmonischen Koefficienten behafteten Durchschnittspunkten, so liegt dieselbe in einer festen Geraden, und zwar ist diese Gerade die harmonische Mitte jener n Geraden in Bezug auf denselben Pol und dieselben harmonischen Koefficienten. Hat man auf der andern Seite in Bezug auf eine Axe die harmonische Mitte zwischen einer Reihe von n Punkten derselben Ebene, und man legt durch irgend einen Punkt der Axe und jene n Punkte gerade Linien, so findet zwischen ihnen nach dem angeführten Satze in Bezug auf die Axe dieselbe harmonische Gleichung statt, wie zwischen jenen n Punkten. Oder, verbindet man einen, in einer festen Geraden liegenden, veränderlichen Punkt mit n festen Punkten derselben Ebene, so geht die harmonische Mitte dieser Verbindungslinien in Bezug auf jene Gerade als Axe und in Bezug auf eine Reihe konstanter Koefficienten, welche jenen Punkten zugehören, durch einen festen Punkt, und zwar ist dieser Punkt die harmonische Mitte der gegebenen n Punkte in Bezug auf dieselbe Axe.

Wollen wir die zweite Ausdrucksform in ihrer ganzen Allgemeinheit darstellen, so gelangen wir zu folgender neuen Form des oben aufgestellten Satzes:

Kombinirt man ein veränderliches System R, welches einem festen Systeme P als Polsysteme eingeordnet ist, mit n festen Systemen $A, B, \ldots,$ deren jedes, mit dem Polsysteme kombinirt, das Hauptsystem liefert: so ist die harmonische Mitte jener n Kombinationen in Bezug auf n zugehörige feste Koefficienten $\alpha, \beta, \ldots,$ deren Summe nicht null ist, und auf jenes
260 *Polsystem P | einem festen Systeme Q eingeordnet, und zwar ist dies feste*

dritten Bande des Crelle'schen Journals [S. 213—272] abgedruckt ist. — Eine Erweiterung dieser Poncelet'schen Theorie habe ich in einer Abhandlung „Theorie der Centralen“, welche im 24-ten Bande desselben Journals [auf S. 262—282 und 372—380] abgedruckt ist, versucht. [Die Poncelet'sche Arbeit ist in dem „Traité des propriétés projectives des figures“ wieder abgedruckt und zwar in Bd. 2 auf S. 1—56.]

System Q die harmonische Mitte der n festen Systeme $A, B, \ldots$ in Bezug auf dieselben Koefficienten $\alpha, \beta, \ldots$ und auf dasselbe Polsystem P.

Diese Ausdrucksform ergiebt sich aus der ersteren (im vorigen Paragraphen aufgestellten) mit vollkommener Schärfe, wenn man von dem Satze Gebrauch macht, dass wenn das Polsystem, die harmonischen Systeme, deren jedes mit dem Polsysteme kombinirt das Hauptsystem liefert, und die zugehörigen harmonischen Koefficienten, | deren Summe 262
aber nicht null sein darf, gegeben sind, die harmonische Mitte jedesmal bestimmt ist.

Die letzte Bestimmung in diesen Sätzen, dass nämlich das feste System Q, dem jene harmonischen Mitten eingeordnet sind, selbst als harmonische Mitte erscheint, fehlt in der Poncelet'schen Darstellung, und es bieten daher die hier gefundenen Ausdrucksformen, da die harmonische Mitte nach § 167 leicht konstruirt werden kann, zugleich neue und einfache geometrische Beziehungen dar.

§ 171. Anwendung auf die Krystallgestalten.

Ich will diese Darstellung mit einer der schönsten Anwendungen schliessen, die sich von der behandelten Wissenschaft machen lässt, nämlich mit der *Anwendung auf die Krystallgestalten.* Doch will ich mich hier auf die Mittheilung der Resultate beschränken, indem ich die Ableitung derselben dem Leser überlasse.

Bekanntlich stellen die Krystallgestalten jede ein System von Ebenen dar, welche ihrer Lage nach veränderlich, ihren Richtungen nach aber konstant sind; das heisst, statt jeder Ebene, die an einer Krystallgestalt hervortritt, kann auch die ihr parallele hervortreten, ohne dass dadurch die Krystallgestalt als solche geändert wird. Die Abhängigkeit, in welcher die Richtungen dieser Ebenen unter einander stehen, können wir vermittelst der durch unsere Wissenschaft festgestellten Begriffe so ausdrücken:

Wenn man vier Flächen eines Krystalles ohne Aenderung ihrer Richtungen so legt, dass sie einen Raum einschliessen), und die Stücke, welche dadurch von dreien derselben abgeschnitten werden, zu Richtmassen macht, so lässt sich jede andere Fläche | des Krystalles als Vielfachensumme* 261
dieser Richtmasse rational ausdrücken.

Darin, dass der Ausdruck ein rationaler ist, liegt, dass die Zeiger sich als rationale Brüche, und also, da es nur auf ihr Verhältniss ankommt, sich als ganze Zahlen darstellen lassen. Hierbei bemerken

---

*) Hierin liegt schon, dass die Flächen keine parallelen Kanten haben dürfen.

wir noch, dass im Allgemeinen diejenigen Ebenen am häufigsten am Krystalle hervorzutreten pflegen, deren Zeiger sich durch die kleinsten ganzen Zahlen ausdrücken lassen, und dass es schon äusserst selten
263 ist, wenn die Zeiger einer Krystallfläche sich nur | durch ganze Zahlen ausdrücken lassen, unter denen grössere als sieben vorkommen. Namentlich lässt sich die abschneidende Ebene, da ihre drei Projektionen im Sinne des Richtsystemes die drei Richtmasse geben, als Summe derselben darstellen, das heisst, ihre Zeiger sind 1, 1, 1.

Aufgabe. Es sind in Bezug auf vier Ebenen A, B, C, D, von denen die letztere die abschneidende ist, die Zeiger von vier anderen Ebenen Q_1, Q_2, Q_3, Q und die Zeiger einer Ebene P gegeben, man soll die Zeiger x, y, z von P suchen, wenn Q_1, Q_2, Q_3 und Q als die ursprünglichen Ebenen, und zwar Q als die abschneidende betrachtet werden sollen.

Auflösung. Es ist, wenn x, y, z sich auf Q_1, Q_2, Q_3 beziehen,

$$x = \frac{P \cdot Q_2 \cdot Q_3}{Q \cdot Q_2 \cdot Q_3}, \quad y = \frac{Q_1 \cdot P \cdot Q_3}{Q_1 \cdot Q \cdot Q_3}, \quad z = \frac{Q_1 \cdot Q_2 \cdot P}{Q_1 \cdot Q_2 \cdot Q}.$$

Diese Auflösung, welche sich durch die Gesetze unserer Analyse
262 264 auf's Leichteste ergiebt *), erscheint in höchst einfacher Gestalt, || während bei der gewöhnlichen analytischen Methode sowohl die Endformel als auch die Mittelglieder in sehr verwickelten Formen erscheinen. Aus dieser Auflösung fliesst sogleich der Satz:

---

*) Sind nämlich P_1, P_2, P_3 die durch Q von Q_1, Q_2, Q_3 abgeschnittenen Stücke, so hat man die Zeiger x, y, z zu suchen, welche der Gleichung

$$P = x P_1 + y P_2 + z P_3$$

genügen. Ist nun

$$P_1 = u Q_1, \ P_2 = v Q_2, \ P_3 = w Q_3,$$

also

$$1) \quad Q = u Q_1 + v Q_2 + w Q_3,$$

und ist ferner

$$2) \quad P = x' Q_1 + y' Q_2 + z' Q_3,$$

so ist auch

$$P = \frac{x'}{u} P_1 + \frac{y'}{v} P_2 + \frac{z'}{w} P_3,$$

also $x = \dfrac{x'}{u}$, und so weiter.

Nun ist aus 1)

$$u = \frac{Q \cdot Q_2 \cdot Q_3}{Q_1 \cdot Q_2 \cdot Q_3},$$

und aus 2)

$$x' = \frac{P \cdot Q_2 \cdot Q_3}{Q_1 \cdot Q_2 \cdot Q_3},$$

also

$$x = \frac{x'}{u} = \frac{P \cdot Q_2 \cdot Q_3}{Q \cdot Q_2 \cdot Q_3}, \ldots$$

Wenn sich eine Reihe von Ebenen aus vier Ebenen, die einen Raum einschliessen, auf die angegebene Weise rational ableiten lässt, so lässt sich auch dieselbe Reihe von Ebenen aus jeden vier andern Ebenen dieser Reihe, welche einen Raum einschliessen, gleichfalls rational ableiten.

Jede Kante der Krystallgestalt erscheint als Produkt der Flächen, welche sie bilden, und dadurch ergiebt sich die Lösung der Aufgabe: „Wenn die Zeiger zweier Flächen P, P_1 in Bezug auf vier Ebenen A, B, C, D, von denen die letzte die abschneidende ist, gegeben sind, dann ihre Kante als Vielfachensumme der von den Ebenen A, B, C gebildeten und durch D begränzten Kanten zu finden.“ Man erhält, wenn A, B, C die durch D begränzten Flächenräume darstellen, als die Zeiger dieser Kante die Ausdrücke

$$\frac{P \,.\, P_1 \,.\, C}{A \,.\, B \,.\, C}, \quad \frac{A \,.\, P \,.\, P_1}{A \,.\, B \,.\, C}, \quad \frac{P_1 \,.\, B \,.\, P}{A \,.\, B \,.\, C},$$

welche sich auf die durch die Produkte AB, BC, CA dargestellten Kanten beziehen *). Hieraus fliesst, da man beliebige vier raumbegränzende Krystallflächen als Fundamentalflächen annehmen kann, 263
der Satz:

Wenn man drei Kanten eines Krystalles, welche nicht in derselben Ebene liegen, ohne Aenderung ihrer Richtung an einen gemeinschaftlichen Anfangspunkt legt, und als ihre Endpunkte | ihre Durchschnitte mit 265
irgend einer Krystallfläche setzt, so lässt sich jede andere Kante des Krystalles als Vielfachensumme dieser Strecken rational ausdrücken.

Da die hindurchgelegte Ebene D mit den drei Kanten a, b, c gleiche Produkte liefert, so wird man auch jede Grösse p, welche als Vielfachensumme von a, b, c dargestellt ist, als harmonische Viel-

*) Nämlich, es ist

$$\frac{P \,.\, P_1 \,.\, C}{A \,.\, B \,.\, C} A \,.\, B$$

die Projektion von $P \,.\, P_1$ auf $A \,.\, B$ nach C, und so weiter, und daraus folgt

$$P \,.\, P_1 = \frac{P \,.\, P_1 \,.\, C}{A \,.\, B \,.\, C} AB + \frac{A \,.\, P \,.\, P_1}{A \,.\, B \,.\, C} BC + \frac{P_1 \,.\, B \,.\, P}{A \,.\, B \,.\, C} CA.$$

Nun stellen AB, BC, CA jene drei Kanten dar, welche zwischen A, B, C liegen und durch die Ebene D begränzt werden; denn es seien c, a, b diese drei Kanten, so werden die Flächenräume bc, ca, ab den drei Flächenräumen A, B, C proportional sein (da diese die Hälften von jenen sind), und also AB, BC, CA den Produkten $bc \,.\, ca$, $ca \,.\, ab$, $ab \,.\, bc$, das heisst den Produkten $abc \,.\, c$, $abc \,.\, a$, $abc \,.\, b$ oder den Grössen c, a, b proportional sein, und diese Grössen können also statt jener Produkte gesetzt werden.

fachensumme von a, b, c in Bezug auf D darstellen können. Somit hat man den Satz:

Nimmt man drei Kanten einer Krystallgestalt und eine Fläche derselben (ohne dass die Kombination der drei Kanten, oder der Fläche mit einer derselben Null giebt), so lässt sich jede andere Kante des Krystalles als harmonische Vielfachensumme jener Kanten in Bezug auf jene Ebene rational ausdrücken.

Dies Gesetz ist dadurch interessant, dass es die Beziehung der Richtungen (ohne Rücksicht auf hypothetische Masswerthe) rein ausdrückt. Ebenso ergiebt sich leicht, da die Flächen ab, bc, ca mit der Kante $a + b + c$ gleiches Produkt liefern, der Satz:

Nimmt man drei Flächen einer Krystallgestalt und eine Kante derselben (ohne dass die Kombination der drei Flächen oder der Kante mit einer derselben Null giebt), so lässt sich jede andere Fläche des Krystalles als harmonische Vielfachensumme jener Flächen in Bezug auf jene Kante rational darstellen.

Da die sämmtlichen Ausdehnungsgrössen im Raume als Elementargrössen, die der unendlich entfernten Ebene angehören, aufgefasst werden können, so werden die Abschattungen auf irgend eine Grundebene nach irgend einem Leitpunkte ein dem ersteren affines System darstellen, und also zwischen ihnen genau dieselben Gleichungen stattfinden, wie zwischen den abgeschatteten Grössen; und umgekehrt jede Gleichung, welche zwischen den Abschattungen stattfindet, wird auch zwischen den abgeschatteten Grössen stattfinden, und der Verein dieser Abschattungen wird daher alle in der Krystallgestalt herrschenden Be-
264 ziehungen vollkommen treu darstellen; die Krystallflächen | werden durch Liniengrössen, die Krystallkanten durch Punktgrössen, oder sofern beide bloss ihren Richtungen nach gegeben waren, durch Linien und Punkte dargestellt sein. Diese Darstellung in der Ebene, da sie alles, was bei den Krystallgestalten als wesentliches vorkommt, rein
266 und treu | abbildet, ohne das zufällige mit aufzunehmen, eignet sich besonders schön, um die Krystallgestalten in der Ebene zu entwerfen.

Diese Andeutungen mögen genügen, um die Fruchtbarkeit der neuen Analyse auch nach dieser Seite hin nachzuweisen.

---

§ 172. Anmerkung über offne Produkte.

Ich habe mich in der obigen Darstellung hauptsächlich auf solche Produkte beschränkt, in denen sich die Faktoren ohne Werthänderung des ganzen Produktes beliebig zu besonderen Produkten zusammenfassen lassen (§ 143); und es schien mir diese Beschränkung nothwendig, damit der schon überdies so mannigfaltige Stoff mehr zusammengehalten werde, und der Leser nicht durch die immer wieder neu hervortretenden Begriffe ermüde. Ueberdies erfordern die Produkte, für welche jene Bedingung nicht mehr gilt, eine ganz differente Behandlung, neue und verwickeltere Grössen treten in ihnen hervor, und wenn gleich dieselben eine reiche Anwendung namentlich auf die Mechanik und Optik gestatten, so kann doch diese Anwendbarkeit hier nicht ganz zur Anschauung gebracht werden, indem dazu erst die in dem folgenden Theile zu entwickelnden Gesetze erforderlich sein würden. Doch will ich die Art ihrer Behandlung hier wenigstens an einem Beispiele erläutern, und zugleich auf die interessanten Grössenbeziehungen hindeuten, welche sich dadurch aufschliessen.

Es war bisher nur das gemischte Produkt (§ 139), welches jenem Zusammenfassungsgesetze nicht unterlag, obgleich die allgemeine multiplikative Beziehung zur Addition, vermöge welcher man statt eines zerstückten Faktors die einzelnen Stücke setzen und die so entstehenden einzelnen Produkte addiren kann, für dasselbe ihre Geltung behielt.
Aber auch diese Beziehung erscheint hier | noch als eine einseitige, in- 265
sofern zwar gemischte Produkte, in welchen Ein Faktor verschieden
ist, während die übrigen gleichartig sind, danach zu Einem Produkte
vereinigt werden können, aber nicht solche, in welchen mehr als Ein
Faktor verschiedenartig ist, es müsste denn sein, dass diese ver-
schiedenartigen | Faktoren schon zu einem Produkte zusammengefasst 267
seien. In der Aufhebung dieser Einseitigkeit nun liegt das Princip der Behandlung jener Produkte.

Es sei $A_1 P . B_1 + A_2 P . B_2$ eine solche Summe zweier gemischten Produkte, in welchen P der gemeinschaftliche Faktor ist, und die beiden letzten Faktoren nicht zu Einem Produkt vereinigt werden dürfen; so kann man statt dessen auch nicht $\mp (A_1 B_1 + A_2 B_2) . P$ setzen; sondern, wenn wir einen solchen Ausdruck, wie es die Analogie der Multiplikation fordert, einführen wollen, so müssen wir die Stelle des Produktes, in welche P einrücken soll, bezeichnen. Es sei diese Stelle durch eine leer gelassene Klammer bezeichnet, so dass

$$[A\,() . B]\,P = AP . B$$

und

$$[A_1\,() . B_1 + A_2\,() . B_2 + \cdots]\,P = A_1 P . B_1 + A_2 P . B_2 + \cdots$$

sei, und es werde ein solches Produkt mit leer gelassener Stelle ein *offnes* genannt. Treten mehrere Faktoren hinzu, von denen nur Einer in die Lücke eintreten soll, so kann dieser durch dieselbe Klammer ausgezeichnet werden, durch welche die Lücke bezeichnet ist. Sind zwei oder mehr Lücken in dem Produkte, so müssen die Klammerbezeichnungen verschieden sein, wenn verschiedene Faktoren in dieselben eintreten sollen.

Wir betrachten hier indessen nur die Produkte mit Einer Lücke, deren Summe formell dadurch bestimmt ist, dass die multiplikative Beziehung bestehen bleibt. Wir werden daher zwei Summen von offnen Produkten, da sie nur durch ihre Multiplikation mit andern Grössen ihrem Begriffe nach bestimmt sind, dann und nur dann als gleich zu setzen haben, wenn sie mit jeder beliebigen, aber beide mit derselben Grösse multiplicirt, gleiches Produkt liefern.*) Es kommt also darauf an, die konstanten Beziehungen zwischen den in jenem Summenausdrucke vorkommenden Grössen, die wir als veränderlich setzen können, auszumitteln, wenn eben der Summenwerth konstant bleiben soll. Je
266 einfacher und | anschaulicher diese konstanten Beziehungen aufgefasst sein werden, desto einfacher und anschaulicher wird der Begriff jener
268 Summe sein, welcher eben als die | Gesammtheit jener konstanten Beziehungen selbst aufgefasst werden kann.

Es lassen sich sehr leicht diese konstanten Beziehungen als Zahlenbeziehungen in Bezug auf irgend ein zu Grunde gelegtes Richtsystem darstellen. Nämlich man hat dann nur die sämmtlichen Grössen in jenem Summenausdruck S, so wie auch die Grösse P, mit welcher multiplicirt werden soll, als Vielfachensummen der Richtmasse von gleicher Stufe darzustellen, dann das Produkt SP gleichfalls als Vielfachensumme von Richtmassen zu gestalten, so wird in diesem Produkte der Koefficient eines jeden Richtmasses (nach § 89) konstant sein, wie sich auch die Grössen in S ändern mögen, wenn eben jenes Produkt oder jene Vielfachensumme, auf welche dasselbe zurückgeführt ist, konstant bleiben soll. Ein jeder solcher Koefficient kann wiederum als Vielfachensumme von den Zeigern der Grösse P dargestellt werden; und da für jeden bestimmten Werth dieser Zeiger jene Vielfachensumme konstant bleiben soll, so muss auch in ihr der Koefficient eines jeden Zeigers von P konstant sein.

Es ist nun sogleich einleuchtend, dass hierdurch die konstanten Beziehungen zwischen den Grössen in S vollständig dargestellt sind, indem aus ihnen die Beständigkeit des Summenausdruckes mit Nothwendigkeit hervorgeht. Wir erläutern dies an einem Beispiele.

Es sei die Summe

$$S = e_1\,() \cdot e_1 + e_2\,() \cdot e_2 + \cdots = \Sigma[e\,() \cdot e]$$

---

*) Wenn auch nur mit jeder Grösse von gegebener Stufe, wobei dann jener Summenwerth zugleich von der Stufenzahl abhängig bleibt.

zu behandeln, in welcher e, e_1, e_2, ... Strecken im Raume vorstellen, und wo bei der letzteren Bezeichnung das Summenzeichen sich auf die verschiedenen Anzeiger 1, 2, ... bezieht. Es ist klar, dass, wenn die Strecken e nicht etwa Einer Ebene angehören, die Grösse P, welche mit jener Summe multiplicirt werden soll, von zweiter Stufe, das heisst ein Flächenraum sein muss, sobald die Produkte der einzelnen Glieder summirbar bleiben sollen, ohne null zu werden. Es seien nun a, b, c die Richtmasse erster Stufe des zu Grunde gelegten Richtsystems, bc, ca, ab also die Richtmasse zweiter Stufe, und

$$e = \alpha a + \beta b + \gamma c,$$
$$P = xbc + yca + zab,$$

so hat man

$$SP = \Sigma(eP \,.\, e) = \Sigma(eP \,.\, (\alpha a + \beta b + \gamma c)).$$

Hier müssen die zu den Richtmassen a, b, c gehörigen Zeiger des 267
ganzen Ausdrucks konstant sein; das heisst, es müssen

$$\Sigma(eP \,.\, \alpha), \quad \Sigma(eP \,.\, \beta), \quad \Sigma(eP \,.\, \gamma)$$ *269*

konstant sein für jeden Werth von x, y, z, wobei

$$eP = abc\,(\alpha x + \beta y + \gamma z)$$

ist. Daraus ergeben sich folgende sechs konstante Grössen:

$$(1) \qquad \begin{cases} \Sigma(\alpha^2), & \Sigma(\beta^2), & \Sigma(\gamma^2), \\ \Sigma(\beta\gamma), & \Sigma(\gamma\alpha), & \Sigma(\alpha\beta). \end{cases}$$

Bezeichnen wir diese sechs Grössen beziehlich mit

$$A,\ B,\ C$$
$$A',\ B',\ C',$$

so ist

$$(2) \qquad \begin{cases} SP = abc\,(Ax + C'y + B'z)\,a + \\ \quad + abc\,(C'x + By + A'z)\,b + \\ \quad + abc\,(B'x + A'y + Cz)\,c. \end{cases}$$

Es hat demnach jene Summe S dann und nur dann einen konstanten Werth, wenn in Bezug auf irgend ein festes Richtsystem diese sechs Zahlengrössen konstant sind. So haben wir nun zwar die konstanten Beziehungen, welche zwischen den in jener Summe vorkommenden Grössen herrschen müssen, wenn die Summe konstant bleiben soll, bestimmt; allein der einfache Begriff jener Summe ist dadurch noch nicht gefunden, weil in diese Bestimmungen ein ganz fremdartiges, mit dem Begriffe jener Summe in keinerlei Beziehung stehendes Element, nämlich das zu Grunde gelegte Richtsystem, eingeführt ist. Es dienen daher jene sechs Grössen nur zur Uebertragung auf gegebene Richtsysteme, während der einfache Begriff der Summe noch zu realisiren ist.

Wir können, um uns der Lösung dieser Aufgabe zu nähern, zuerst versuchen, jene Summe auf eine möglichst geringe Anzahl von Gliedern zurückzuführen.

Da jede Strecke drei Zeiger darbietet, so scheint für den ersten Anblick jene Summe auf zwei Glieder reducirbar, in sofern zur Bestimmung der sechs Zeiger jener Strecken sechs Gleichungen erscheinen; allein es erhellt leicht, dass, wenn nicht etwa sämmtliche Grössen in S derselben Ebene angehören, jene sechs Zeiger nicht so gewählt werden können, dass diesen sechs Gleichungen genügt wird. Denn, da das Richtsystem willkührlich ist, so kann es auch so genommen werden, dass jene zwei Strecken mit zweien der Richtmasse, etwa mit a und b zusammenfallen; dann ist klar, wie

268 $$SP = aP \,.\, a + bP \,.\, b$$

270 stets eine Strecke der Ebene ab darstellt; es müsste also das Glied von SP, was der dritten Axe c angehört, stets null sein, das heisst, B', A', C müssten null sein. C aber, was die Summe der Quadrate von γ vorstellt, kann nicht [anders] null werden, als wenn sämmtliche Werthe von γ null sind, das heisst, sämmtliche Werthe e der Ebene ab angehören. Es lässt sich daher die Summe S auf keine geringere Anzahl reeller Glieder zurückführen als auf drei. Da aber drei Strecken neun Zeiger darbieten, so werden dieselben durch jene sechs Gleichungen nicht bestimmt sein, sondern noch für drei Zahlenbestimmungen Raum lassen.

Um nun eine gegebene Summe S von der Form $\Sigma[e\,()\,.\,e]$, in welcher die verschiedenen Grössen e nicht derselben Ebene angehören sollen, das heisst, A, B, C stets geltende (positive) Werthe darstellen, auf drei Glieder zu reduciren, gehen wir auf die Gleichung (2) zurück. Setzen wir hier

$$P = ab,$$

das heisst

$$x = y = 0, \quad z = 1,$$

so ist

$$SP = S\,(ab) = abc\,(B'a + A'b + Cc).$$

Da hier C nicht null werden kann, so ist $S\,(ab)$ nie der Ebene ab parallel. Also können wir, da die Annahme des Richtsystems willkührlich ist, wenn nur die drei Richtaxen von einander unabhängig sind, die dritte Richtaxe c parallel $S\,(ab)$ annehmen. Dann wird

$$A' = B' = 0$$

und $S\,(ab)$ gleich $abc\,.\,Cc$. Da auch der Masswerth c willkührlich ist, und C positiv ist, so kann man c so annehmen, dass C gleich Eins ist*); dann ist

$$S(ab) = abc \, . \, c.$$

Nimmt man nun ferner

$$P = ca, \quad z = x = 0, \quad y = 1,$$

so ist

$$S(ca) = abc\,(C'a + Bb)^{**}),$$

was nothwendig in der Ebene ab liegen muss, aber da B nicht null werden kann, von a unabhängig ist. Da nun b innerhalb der Ebene 269
ab willkührlich angenommen werden kann, wenn es nur von a unab- 271
hängig bleibt, so kann man b selbst diesem Ausdrucke $S(ca)$ parallel setzen. Man hat dann noch $C' = 0$, also

$$A' = B' = C' = 0,$$

und $S(ca)$ wird gleich $abcB \, . \, b$, oder, wenn man wieder den Masswerth von b so annimmt, dass B gleich Eins wird,

$$S(ca) = abc \, . \, b.$$

Endlich wird $S(bc)$ gleich $abcA \, . \, a$, oder bei einer solchen Annahme von a, dass A gleich Eins wird,

$$S(bc) = abc \, . \, a.$$

Die Bedingungsgleichungen, die wir auf solche Weise realisirt haben, sind also

$$(3) \qquad \begin{cases} A' = B' = C' = 0 \\ A = B = C = 1, \end{cases}$$

woraus folgt

$$(4) \qquad S = a\,() \, . \, a + b\,() \, . \, b + c\,() \, . \, c.$$

Es ist also auf die angegebene Weise jene Summe in der That auf drei reale Glieder zurückgeführt; und für die Grössen c, b, a haben wir die Gleichungen

$$(5) \qquad \begin{cases} S(ab) = abc \, . \, c \\ S(ca) = abc \, . \, b \\ S(bc) = abc \, . \, a. \end{cases}$$

Zu diesen Gleichungen (5) würde man direkt gelangen, wenn man einmal voraussetzt, dass sich jene Summe auf drei Glieder zurückführen lässt. Denn, sind a, b, c die diesen Gliedern zugehörigen Strecken,

---

*) Man hat zu dem Ende nur statt c zu setzen $\frac{c}{\sqrt{c}}$, dann verwandelt sich γ^2 in $\frac{\gamma^2}{C}$ und $\Sigma(\gamma^2)$ in $\frac{\Sigma(\gamma^2)}{C}$, das heisst, in 1.

**) Da A' gleich Null ist.

so hat man aus (4) sogleich durch Multiplikation mit ab, ca, bc die Gleichungen (5). Betrachtet man eine dieser Gleichungen, zum Beispiel die erste, so ist sie von dem Masswerthe des Faktors (ab), mit welchem S multiplicirt ist, unabhängig; setzt man daher irgend eine mit ab parallele Grösse gleich Q, so hat man

$$SQ = Qc\,.\,c = (c\,()\,.\,c)\,Q, \tag{6}$$

und da Q ursprünglich willkührlich angenommen werden konnte, so wird jede Grösse c, welche dieser Gleichung für irgend ein Q genügt, als eine der drei Strecken betrachtet werden können, auf welche sich S zurückführen lässt; dann ist Q selbst die Ebene der beiden andern,
270 und in ihr kann dann noch die eine der beiden andern Strecken von
272 willkührlicher Richtung angenommen werden, | wodurch dann alles bestimmt ist. Jene willkührliche Annahme der Richtung der Ebene Q und der Richtung der einen Strecke in ihr vertritt die Stelle der drei willkührlich anzunehmenden Zahlenbestimmungen, von denen oben die Rede war.

Um nun den Begriff zu vollenden, haben wir die Beziehung zwischen je drei solchen Strecken aufzustellen; dies wird geschehen, indem wir die Gleichung der Oberfläche, deren Punktträger jene Strecken sind, wenn sie an denselben Anfangspunkt gelegt sind, aufstellen, und zwar in Bezug auf je drei beliebige Strecken, auf die S zurückgeführt werden kann.

Man hat, wenn p dieser Träger ist, und in die Gleichung (6) p statt c gesetzt wird,

$$SQ = Qp\,.\,p. \tag{7}$$

Ist nun

$$\begin{aligned} p &= xa + yb + zc \\ S &= a\,()\,.\,a + b\,()\,.\,b + c\,()\,.\,c \\ Q &= x'bc + y'ca + z'ab, \end{aligned}$$

so ist

$$SQ = abc\,.\,(x'a + y'b + z'c).$$

Aus (7) folgt also, dass $x'a + y'b + z'c$ parallel p ist, das heisst, dass $x' : y' : z' = x : y : z$ ist. Da nun in der Gleichung (7) statt Q jede mit Q parallele Grösse gesetzt werden kann, so können wir nun

$$Q = xbc + yca + zab$$

setzen, dann erhalten wir aus (7)

$$abc = Qp = (x^2 + y^2 + z^2)\,abc,$$

das heisst

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1. \tag{8}$$

Dies ist aber die Gleichung eines Ellipsoides, in welchem die Grundmasse a, b, c konjugirte Halbmesser sind.*) Nennen wir einen Ausdruck wie $a\,()\,.\,a$ ein offnes Quadrat von a, so können wir die gewonnenen Resultate in folgendem Satze darstellen:

Eine Summe von offnen Quadraten im Raume ist gleich 271 273
der Summe aus den offnen Quadraten von je drei beliebigen konjugirten Halbmessern, welche einem konstanten Ellipsoid angehören.

Da dies Ellipsoid demnach der vollkommen treue Ausdruck jener Summe ist, so können wir auch sagen, diese Summe sei eine solche Grösse, die ein Ellipsoid darstellt und selbst als Ellipsoid gedacht werden könne. Auf diese Weise nun ist der Begriff jener Summe, welcher Anfangs bloss formell auftrat, auf seine reale Bedeutung zurückgeführt.

Wir stellen uns die Aufgabe, die Gleichung des Ellipsoids, welches zu einem gegebenen Summenausdruck

$$S = \Sigma\,(e\,()\,.\,e)$$

gehört, zu finden. Wir haben zu dem Ende in der Gleichung (7)

$$SQ = pQ\,.\,p$$

nur entweder p oder Q zu eliminiren, indem p der Träger eines Punktes der Oberfläche ist, Q aber, da es die Ebene der zu p gehörigen konjugirten Halbmesser darstellt, der Tangentialebene parallel ist. Um im ersteren Falle (wenn p eliminirt ist) das Ellipsoid als Umhüllte darzustellen, können wir uns der in § 144 erwähnten Methode bedienen, wonach der Masswerth von Q so angenommen wurde, dass, wenn Q in die Lage der Tangentialebene versetzt wird, seine Abweichung vom Ursprung der Träger eine konstante Grösse ist, die wir der Einheit gleich setzen können. Es ist aber jene Abweichung gleich pQ, also pQ gleich der Einheit. Multiplicirt man daher obige Gleichung mit Q, so hat man

$$SQ\,.\,Q = pQ\,.\,pQ = 1,$$

was die geometrische Gleichung jenes Ellipsoids als umhüllter Fläche ist. Es ist aber

---

*) Wenn man unter x', y', z' die Koordinaten selbst versteht, welche zu den Zeigern x, y, z gehören, so hat man $x' = xa$, ..., oder $x = \frac{x'}{a}$, ... und die Gleichung (8) wird dann

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1,$$

was die gewöhnliche Form der Gleichung eines Ellipsoids ist.

$$SQ \,.\, Q = \Sigma (eQ \,.\, e) \,.\, Q = \Sigma (eQ)^2,$$

und die Gleichung des Ellipsoids ist also

$$\Sigma (eQ)^2 = 1. \tag{9}$$

Will man diese Gleichung auf ein gegebenes Richtsystem a, b, c zurückführen, so nehme man

$$Q = xbc + yca + zab$$

an, und

$$e = \alpha a + \beta b + \gamma c,$$

272 also

274

$$eQ = (\alpha x + \beta y + \gamma z),$$

wenn abc (das Hauptmass) der Einheit gleich gesetzt ist, und man hat also

$$\Sigma (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 = 1,$$

oder, mit Beibehaltung der obigen Bezeichnung

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2A'yz + 2B'zx + 2C'xy = 1.$$

Wir haben bisher nur die Summe von offenen Quadraten betrachtet. Nehmen wir auch die Differenzen in die Betrachtung auf, so können die Ellipsoide auch übergehen in Hyperboloide, und wir gelangen dann zu dem allgemeinen Begriffe einer Grösse, die im Raume durch eine Oberfläche, in der Ebene durch eine Kurve zweiter Ordnung dargestellt wird, und die wir, da sie ursprünglich als Ellipsoid oder Ellipse erscheint, eine elliptische Grösse nennen könnten. Doch scheint es kaum nöthig, dies noch weiter auszuführen, indem der Gang der weitern Entwickelung keine Schwierigkeiten mehr darbietet. Auch übersieht man leicht, wie die ganze Entwickelung so hätte geführt werden können, dass gar nicht auf willkührliche Koordinatensysteme zurückgegangen [worden] wäre; und ich habe den eingeschlagenen Weg nur darum gewählt, um zugleich die Behandlungsweise für die offenen Produkte überhaupt hindurchblicken zu lassen.

Anhang I. (1877.)

Ueber das Verhältniss der nichteuklidischen Geometrie zur Ausdehnungslehre.

(Vgl. § 15—23.)

Es ist die ganze Darstellung in § 15—23 zum Schaden der Wissen- 273
schaft bisher fast ganz unbeachtet geblieben. Weder Riemann in seiner Habilitationsschrift*) vom Jahre 1854, die zuerst 1867 veröffentlicht wurde, noch Helmholtz**) in seiner Abhandlung „Ueber die Thatsachen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. 1868“, noch auch in seinem vortrefflichen Vortrage „Ueber den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome. 1876“ thut derselben Erwähnung, obgleich darin die Grundlagen der Geometrie in viel einfacherer Weise zur Anschauung kommen als in jenen späteren Schriften.

In der Ausdehnungslehre erscheint ganz speciell und im Gegensatz gegen Euklid die gerade Linie als Grundlage der geometrischen Definitionen. Die Ebene wird in § 16 definirt als Gesammtheit der Parallelen, welche eine gerade Linie schneiden, und der Raum als Gesammtheit der Parallelen, welche eine Ebene schneiden, und weiter kann die Geometrie nicht fortschreiten, während die abstrakte Wissenschaft keine Gränzen kennt. Da alle Punkte einer geraden Linie sich aus zwei Punkten derselben numerisch ableiten lassen, so erscheint die gerade Linie als einfaches Elementargebiet zweiter Stufe und entsprechend die Ebene als einfaches Elementargebiet dritter, der Raum als ein solches vierter Stufe***).

---

*) [Gemeint ist seine Habilitationsrede: Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. Ges. Werke, 1. Ausg. S. 254 ff., 2. Ausg. S. 272 ff.]

**) [Die Abhandlung steht in den Göttinger Nachrichten von 1868, S. 193—221, s. auch seine ges. wiss. Abh. Bd. II, S. 618—639. Den Vortrag findet man in seinen „Vorträgen und Reden“, Bd. II, S. 1 ff., Braunschweig 1884.]

***) Um Verwechselungen vorzubeugen, bemerke ich, dass die Strecken einer Ebene ein einfaches Ausdehnungsgebiet zweiter Stufe, die des Raumes ein einfaches Ausdehnungsgebiet dritter Stufe und überhaupt die Strecken eines einfachen Elementargebietes $(n+1)$-ter Stufe ein einfaches Ausdehnungsgebiet n-ter Stufe bilden.

274 Es sind also zum Beispiel | die Punkte einer Ebene aus drei nicht in gerader Linie liegenden Punkten numerisch ableitbar, etwa durch die Zahlen x_1, x_2, x_3. Wird nun zwischen diesen drei Zahlen eine homogene Gleichung festgesetzt, so reducirt sich die Gesammtheit der Punkte, welche der Gleichung genügen, auf ein Gebiet zweiter Stufe. Ist diese homogene Gleichung vom ersten Grade, so wird das so bestimmte Gebiet zweiter Stufe ein einfaches, das heisst, eine gerade Linie; ist aber jene Gleichung von höherem Grade, so entstehen krumme Linien, für welche nur ein Theil der für die gerade Linie gültigen longimetrischen Gesetze gelten wird.

Geht man zum Raum über, so ist jeder Punkt desselben aus vier Punkten, welche ein Tetraeder bilden, durch vier Zahlen $x_1, \dots x_4$ numerisch ableitbar. Herrschen zwischen diesen vier Grössen zwei von einander unabhängige homogene Gleichungen, von denen keine vom ersten Grade ist, so erhalten wir Linien doppelter Krümmung, für welche wieder nur ein Theil jener longimetrischen Gesetze gilt.

Schreiten wir nun vom Raume, als einem Gebiet vierter Stufe, zu einem Gebiet fünfter Stufe vor (welches nicht mehr geometrisch existirt), so hat man für dasselbe fünf Ableitungszahlen $x_1, \dots x_5$, und besteht zwischen diesen eine homogene Gleichung ersten Grades, so kommt man auf das einfache Elementargebiet vierter Stufe, das heisst, auf den Euklidischen Raum zurück. Herrscht dagegen zwischen ihnen eine homogene Gleichung höheren Grades, so kommt man zwar auch zu Elementargebieten vierter Stufe, indessen zu solchen, für welche die Euklidischen Axiome nicht mehr gelten, also gewissermassen zu nichteuklidischen Räumen*); ja man kann zu einem Elementargebiete sechster Stufe übergehen und zwischen den sechs Ableitungszahlen zwei höhere homogene Gleichungen annehmen, und erhält so abermals
275 neue Elementargebiete vierter Stufe**) und kann | somit eine unendliche Menge nichteuklidischer Räume bilden, aus deren Gleichungen sofort hervorleuchtet, in wie weit die Euklidischen Axiome noch gelten.

So bietet also die Ausdehnungslehre die vollkommen ausreichende und ganz allgemeine Grundlage auch für diese und ähnliche Betrachtungen.

---

*) So zum Beispiel entsteht der Helmholtz'sche sphärische Raum, wenn man zwischen den genannten fünf Ableitungszahlen eine gewisse homogene Gleichung zweiten Grades annimmt (oder allgemeiner ein gekrümmter Raum bei Annahme einer Gleichung beliebigen Grades).

**) Man könnte einen solchen Raum im Gegensatz zu dem eben genannten (einfach) gekrümmten Raum etwa einen doppelt gekrümmten Raum nennen.

Anhang II. (1877.)

Ueber das eingewandte Produkt.

(Vgl. das dritte Kapitel des zweiten Abschnitts.)

Da in dem ganzen Kapitel nur der Begriff des auf ein Hauptgebiet bezüglichen Produktes zur Evidenz entwickelt ist, und alle übrigen formellen Begriffe nach und nach fallen gelassen sind, so wäre es zweckmässig gewesen, die ganze Entwickelung auf jenen Begriff zu beschränken. Doch hätte sich auch in dieser Beschränkung die Darstellung einfacher fassen lassen, was ich hier versuchen will. Ich gehe dabei auf den Satz am Schlusse von § 126 zurück, wonach, wenn a und b die Stufenzahlen zweier Grössen, u die des sie zunächst umfassenden Gebietes und c die des gemeinschaftlichen Gebietes ist, $c = a + b - u$ ist.

Der Begriff des eingewandten (regressiven), auf ein Hauptgebiet bezüglichen Produktes ist dahin festgestellt, dass dasselbe dann und nur dann null ist, wenn das die Faktoren zunächst umfassende Gebiet von geringerer Stufe ist als das Hauptgebiet. Hierauf und auf den allgemeinen Begriff der Multiplikation, das heisst, auf die bekannte Beziehung derselben zur Addition, ist der formale Begriff des betrachteten Produktes gegründet. Um zu dem realen Begriff desselben zu gelangen, kommt es zunächst darauf an, dasjenige, was bei einer Formänderung des Produktes, die den Werth desselben nicht ändert, konstant bleibt, in möglichst anschaulicher Form darzustellen.

Es sei $A . B$ das eingewandte Produkt, dessen Werth nicht null ist, und seien a und b die Stufenzahlen von A und B, u die des
Hauptgebietes, so zeige ich zuerst, dass bei jeder Formänderung des 276
Produktes $A . B$, welche dessen Werth unverändert lässt, das den beiden Faktoren gemeinschaftliche Gebiet unverändert bleibt.

Unmittelbar leuchtet dies ein, wenn die beiden Faktoren denselben Werth behalten oder sich in umgekehrtem Zahlenverhältnisse ändern, weil dann auch deren Gebiete dieselben bleiben. Aendert nun einer der beiden Faktoren, zum Beispiel der zweite B seinen Werth in $B + B_1$, ohne dass sich der Werth des Produktes ändert, so folgt daraus, dass $A . B_1 = 0$ sein, das heisst, das die Faktoren A und B_1 zunächst umfassende Gebiet von niederer als u-ter Stufe, oder, was dasselbe ist, das ihnen gemeinschaftliche Gebiet [von] höherer als c-ter Stufe sein muss. Da nun die Summe zweier Grössen höherer Stufe nach § 51 sich stets auf den Fall zurückführen lässt, wo die beiden Grössen in einem Gebiete nächsthöherer Stufe, also in unserm Falle in einem Gebiete $(b+1)$-ter Stufe liegen, so brauchen wir auch hier nur diesen Fall zu berücksichtigen. Aber dann haben B und B_1 ein Gebiet $(b-1)$-ter Stufe gemeinsam, und man kann also B_1 in b einfache Faktoren zerlegen, von denen $b-1$ in B liegen und einer ausserhalb B; nun soll B_1 mit A aber $c+1$ einfache Faktoren gemeinsam haben, was nur möglich ist, wenn c von jenen $b-1$ einfachen Faktoren zugleich in A liegen, das heisst, dem gemeinsamen Gebiete C angehören, und der eine ausserhalb B liegende Faktor von B_1 gleichfalls in A liegt. Es liegt somit das ganze Gebiet C in B_1, das heisst, C ist das gemeinsame Gebiet von A und B_1, also auch von A und $B+B_1$; das den beiden Faktoren gemeinsame Gebiet bleibt [mithin] unverändert, wenn das Produkt denselben Werth behält. Denn für die Aenderung des ersten Faktors gilt dieselbe Schlussreihe.

Um nun den metrischen Werth des Produktes zu finden, setzen wir $B = CD$, also $A \, . \, B = A \, . \, CD$, dann stellt AD das umfassende, hier also das Hauptgebiet dar. Nun können wir einen Theil des Hauptgebietes gleich Eins setzen (zum Beispiel das äussere Produkt der in ihrer Reihenfolge genommenen ursprünglichen Einheiten). Dann stellt $A \, . \, D$ eine Zahl dar. Wenn dieselbe $= \lambda$ ist, so kann man statt C und D die Grössen $C_1 = \lambda C$ und $D_1 = \frac{D}{\lambda}$ einführen, ohne den Werth des Produktes $C \, . \, D$ zu ändern; dann wird aber $A \, . \, D_1 = 1$, und $A \, . \, CD = A \, . \, C_1 D_1$.

Ich behaupte nun, dass C_1 bei der oben besprochenen Form-
277 änderung des Produktes ungeändert bleibt. Es | kann nach dem Obigen $B_1 = C_1 \, . \, E_1$ gesetzt werden, wo E_1 einen einfachen Faktor mit A gemein hat, das heisst, $A \, . \, E_1 = 0$ ist; dann wird also in $A \, . \, C_1 (D_1 + E_1)$ das Produkt $A \, . \, (D_1 + E_1) = A \, . \, D_1 = 1$, und es bleibt das so bestimmte C_1 ungeändert. Wir können daher C_1 als den wahren Werth des Produktes betrachten und können dann allgemein, auch wenn $A \, . \, D$ nicht gleich Eins ist, stets $A \, . \, CD = AD \, . \, C$ setzen, wo AD [ein] Theil des Hauptgebietes und also eine Zahl ist, und können dies als die *reale* Definition des eingewandten Produktes auffassen.

Anhang III. (1877.)

Kurze Uebersicht über das Wesen der Ausdehnungslehre.

(In Folge einer Aufforderung Grunerts in dessen Archiv Bd. VI (1845) veröffentlicht vom Verfasser.)

I. Tendenz der Ausdehnungslehre als solcher. [337]

1. Meine Ausdehnungslehre bildet die abstrakte Grundlage der Raumlehre (Geometrie), das heisst, sie ist die von allen räumlichen Anschauungen gelöste, rein mathematische Wissenschaft, deren specielle Anwendung auf den Raum die Raumlehre ist.

Die Raumlehre, da sie auf etwas in der Natur gegebenes, nämlich
den Raum, zurückgeht, ist kein Zweig der reinen Mathematik, | sondern [338]
eine Anwendung derselben auf die Natur; aber nicht eine blosse Anwendung der Algebra, auch dann nicht, wenn die algebraische Grösse, wie in der Funktionenlehre, als stetig veränderlich betrachtet wird; denn es fehlt der Algebra der der Raumlehre eigenthümliche Begriff der verschiedenen Dimensionen. Daher ist ein Zweig der Mathematik nothwendig, welcher in den Begriff der stetig veränderlichen Grösse zugleich den Begriff von Verschiedenheiten aufnimmt, welche den Dimensionen des Raumes entsprechen, und dieser Zweig ist meine Ausdehnungslehre.

2. Doch sind die Sätze der Ausdehnungslehre nicht etwa 278
blosse Uebertragungen geometrischer Sätze in die abstrakte Sprache, sondern haben eine viel allgemeinere Bedeutung; denn, während die Raumlehre gebunden bleibt an die drei Dimensionen des Raumes, so bleibt die abstrakte Wissenschaft von diesen Schranken frei.

In der Raumlehre können durch die Bewegung von Punkten Linien, durch die der Linien Flächen, durch die der Flächen Körperräume erzeugt werden, aber weiter kann die Raumlehre nicht fortschreiten. Hingegen, stellt man sich vor, dass an die Stelle des Punktes und der Bewegung abstrakte, vom Raume unabhängige Begriffe eingeführt werden (s. unten, Nr. 4—6), so verschwinden diese Schranken.

3. Dadurch geschieht es nun, dass die Sätze der Raumlehre eine Tendenz zur Allgemeinheit haben, die in ihr vermöge ihrer Beschränkung auf drei Dimensionen keine Befriedigung findet, sondern erst in der Ausdehnungslehre zur Ruhe kommt.

Zwei Beispiele mögen dies erläutern.

1) Zwei gerade Linien derselben Ebene schneiden sich in Einem Punkte, ebenso eine Ebene und eine Gerade, zwei Ebenen in Einer geraden Linie, vorausgesetzt, dass die Geraden, oder die Ebene und die Gerade, oder die Ebenen nicht zusammenfallen, und die Durchschnitte im Unendlichen mitgerechnet werden. Werden der Punkt, die Gerade, die Ebene, der Körperraum beziehlich als Gebiete erster, zweiter, dritter, vierter Stufe aufgefasst, so liegt darin der allgemeine Satz angedeutet, dass ein Gebiet von a-ter und eins von b-ter Stufe, wenn sie in einem Gebiete von c-ter Stufe, aber auch in keinem Gebiete von niederer Stufe vereinigt sind, ein Gebiet $(a+b-c)$-ter Stufe gemeinschaftlich haben; aber die Raumlehre kann diesen Satz nur für c gleich oder kleiner als vier zur Anschauung bringen.

2) Der Flächenraum eines Dreiecks ist die Hälfte von dem eines Parallelogramms, dessen Seiten mit zwei Seiten des Dreiecks gleich lang und parallel sind, der Körperraum des Tetraeders ein Sechstel von dem des Spathes (Parallelepipedums), dessen Kanten mit drei in einem Punkte zusammentreffenden Kanten des Tetraeders gleich lang
279 und parallel sind. Darin scheint der Satz | angedeutet: der Raum, welcher zwischen n Punkten liegt, die in einem Gebiete n-ter Stufe (und in keinem Gebiete von niederer Stufe) vereinigt sind, ist $\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}$ von dem Raume eines Gebildes (einer Figur, eines
[339] Körpers), dessen Begränzungslinien | (Seiten, Kanten) den, von einem der n Punkte zu den übrigen gezogenen geraden Linien gleich und parallel sind. Aber auch dieser Satz kommt hier nicht in seiner Allgemeinheit heraus.

Hingegen in der Ausdehnungslehre treten in diesen beiden und in allen andern Fällen die ganz allgemeinen Sätze vollkommen hervor. So nimmt also überall die Raumlehre einen Anlauf zur Allgemeinheit, stösst sich aber, ohne diese Allgemeinheit erreichen zu können, an den ihr durch den Raum gesteckten Schranken, welche nur die abstrakte Wissenschaft der Ausdehnungslehre zu durchbrechen vermag.

4. *Das der Linie entsprechende Gebilde der Ausdehnungslehre ist die Gesammtheit der Elemente, in die ein seinen Zustand stetig änderndes Element übergeht.*

Die Linie kann als Gesammtheit der Punkte betrachtet werden, in die ein seinen Ort stetig ändernder Punkt übergeht. Substituiren wir hier dem Punkte allgemeiner irgend ein Ding, welches einer stetigen Aenderung irgend eines Zustandes, den es hat, fähig ist, und abstrahiren nun von allem anderweitigen Inhalte des Dinges und aller

Besonderheit dieses seines Zustandes, und nennen das von allem anderweitigen Inhalte abstrahirte Ding das *Element*, so gelangen wir zu dem aufgestellten Begriffe.

5. Wenn hierbei das Element seinen Zustand stets auf gleiche Weise ändert, so dass, wenn aus einem Elemente a des Gebildes durch Eine solche Aenderung ein anderes Element b desselben hervorgeht, dann durch eine gleiche Aenderung aus b ein neues Element c desselben Gebildes hervorgeht, so entsteht das der *geraden* Linie entsprechende Gebilde, das Gebiet zweiter Stufe.

Die gerade Linie wird von dem Punkte konstruirt, wenn dieser
seinen Ort stets nach derselben Richtung hin ändert; | substituiren wir 280
daher der Richtung die Art und Weise der Aenderung, so geht der aufgestellte Begriff hervor*).

6. Wenn man alle Elemente eines Gebietes n-ter Stufe einer und derselben Aenderungsweise unterwirft, welche zu neuen (in jenem Gebiete nicht enthaltenen) Elementen führt, so heisst die Gesammtheit der durch diese Aenderungsweise und die entgegengesetzte erzeugbaren Elemente ein Gebiet $(n+1)$-ter Stufe; das Gebiet dritter Stufe entspricht der Ebene, das vierter dem ganzen Raume.

Wenn die Punkte einer geraden Linie sich alle nach einer und derselben Richtung bewegen, die zu neuen (in jener Geraden nicht enthaltenen) Punkten führt, so ist die Gesammtheit der durch diese Bewegung und die entgegengesetzte erzeugbaren Punkte die Ebene; und
wenn man ebenso mit den Punkten der | Ebene verfährt, so erhält man [340]
den ganzen Raum. Substituirt man hier den räumlichen Begriffen die vorher angegebenen abstrakten und hält den Fortgang von einer Stufe zur nächst höheren allgemein fest, so ergiebt sich der obige Begriff.

II. Tendenz der in meiner Ausdehnungslehre angewandten Rechnungsmethode, an der Geometrie erläutert.

7. In meiner Ausdehnungslehre tritt eine eigenthümliche Rechnungsmethode hervor, welche, auf die Raumlehre übertragen, von unerschöpflicher Fruchtbarkeit ist, und hier (in der Raumlehre) darin besteht, dass räumliche Gebilde

*) Soll die gerade Linie und das ihr entsprechende Gebilde nach beiden Seiten unendlich sein, so muss der Punkt (das Element) auch nach der entgegengesetzten Richtung (Aenderungsweise) fortschreiten, was wir hier der Einfachheit wegen übergangen haben.

(Punkte, Linien und so weiter) unmittelbar der Rechnung unterworfen werden.

Zum Beispiel wird die durch zwei Punkte 'geführte Gerade ihrer Grösse und Lage nach als Verknüpfung jener Punkte und zwar als eine eigenthümliche Art der Multiplikation aufgefasst (s. unten, Nr. 15), ebenso das zwischen drei Punkten liegende Dreieck seinem Flächen-
281 raum und der Lage seiner Ebene nach als Produkt dreier Punkte, | so dass dies Produkt null ist, wenn der Flächenraum jenes Dreiecks es ist, das heisst, die drei Punkte in gerader Linie liegen; ferner der Durchschnittspunkt zweier gerader Linien in einem unten (Nr. 22 und Aufgabe 19) näher zu bezeichnenden Sinne als Produkt dieser Linien.

8. Die Tendenz dieser Rechnungsmethode für die Geometrie ist, die synthetische und analytische Methode zu vereinigen, das heisst, die Vorzüge einer jeden auf den Boden der andern zu verpflanzen, indem jeder Konstruktion eine einfache analytische Operation zur Seite gestellt wird, und umgekehrt.

Zur Erläuterung diene folgendes Beispiel. Bekanntlich beschreibt eine Ecke γ eines veränderlichen Dreiecks, dessen beide andere Ecken α, β sich in festen geraden Linien A und B bewegen, und dessen Seiten durch drei feste Punkte a, b, c gehen, einen Kegelschnitt. Sind a, b, c die festen Punkte, durch welche beziehlich die den Ecken α, β, γ gegenüberliegenden Seiten gehen, so sieht man, dass (s. Nr. 7) $\gamma a B$ die Ecke β, $\gamma a B c A$ die Ecke α darstellt, und da die Punkte α, b, γ in Einer geraden Linie liegen, also ihr Produkt null ist (Nr. 7), so hat man die Gleichung

$$\gamma a B c A b \gamma = 0$$

als Gleichung eines von γ beschriebenen Kegelschnittes. Man sieht, dass diese Gleichung in Bezug auf γ vom zweiten Grade ist, und man wird schon hierin ein auf alle algebraischen Kurven gehendes wichtiges Gesetz ahnen.

III. Einfachste Rechnungsregeln für die neue Analyse.

Die Verknüpfungen, die in diesem Theile der Ausdehnungslehre vorkommen, sind Addition, Subtraktion, kombinatorische Multiplikation, kombinatorische Division.

[341] 9. Für alle Arten der Addition und Subtraktion gilt das gewöhnliche Rechnungsverfahren.

10. Für alle Multiplikations- und Divisionsweisen gilt das Gesetz: Statt ein Aggregat von Gliedern mit einem zeichen-