losen Ausdrucke auf irgend eine Weise zu multipliciren oder zu dividiren, kann man ohne Aenderung des letzten Ergebnisses die | einzelnen Glieder mit diesem Ausdrucke auf die- 282
selbe Weise*) multipliciren oder dividiren, und die einzelnen Produkte oder Quotienten so zu einem Aggregate verknüpfen, dass man einem jeden das Zeichen desjenigen Gliedes vorsetzt, durch dessen Multiplikation oder Division es entstanden ist; ein Zahlfaktor kann überdies, wenn er irgend einem Faktor des Produktes zugeordnet ist, auch jedem andern oder auch dem Produkte zugeordnet werden; endlich $\frac{A}{A}$ ist allemal Eins, wenn A nicht null ist.

11. Ein Produkt $a.b.c\ldots$ nenne ich ein kombinatorisches, wenn ausser dem Gesetze Nr. 10 für dasselbe noch das Gesetz gilt, dass, wenn von den einzelnen Faktoren $a, b, c, \ldots$ zwei aufeinanderfolgende vertauscht werden, das Produkt entgegengesetzten Werth annimmt; und zwar nenne ich $a, b, c, \ldots$ und deren Summen oder Differenzen dann Faktoren erster Ordnung.

Hiernach ist also zum Beispiel $a.b.c.d. = -a.c.b.d.$

12. Wenn in einem kombinatorischen Produkte zwei Faktoren erster Ordnung einander gleich sind, so ist das Produkt null.

Zum Beispiel $a.b.b.d = 0$ (wie sich auch sogleich ergiebt, wenn man in dem Beispiel zu Nr. 11 b und c gleich setzt).

Folgende Aufgaben mögen zur Erläuterung dieser Multiplikationsweise dienen:

Aufgabe 1. *Das kombinatorische Produkt*

$$(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3) . (\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3) . (\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3)$$

zu entwickeln, wenn $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2, \beta_3; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ *Zahlgrössen,* e_1, e_2, e_3 *aber kombinatorische Faktoren erster Ordnung bezeichnen.*

Man erhält durch Anwendung der Rechnungsregeln (9—12) schliesslich den Ausdruck

$$(\alpha_1\beta_2\gamma_3 - \alpha_1\beta_3\gamma_2 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 - \alpha_3\beta_2\gamma_1 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 - \alpha_2\beta_1\gamma_3)\, e_1 . e_2 . e_3 .$$

Aufgabe 2. *Drei Gleichungen ersten Grades mit drei Unbekannten* 283
durch die Regeln der kombinatorischen Multiplikation zu lösen (§ 45).

Die drei Gleichungen seien

---

*) Dieser Ausdruck bezieht sich nicht nur auf die Verknüpfungsweise im Allgemeinen, sondern auch auf die Stellung des Faktors in dem Produkte.

$$(1)\qquad \begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = \delta_1, \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = \delta_2, \\ \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z = \delta_3. \end{cases}$$

[342] Man multiplicire die drei Gleichungen beziehlich mit drei kombinatorischen Faktoren erster Ordnung e_1, e_2, e_3, deren Produkt nicht null ist, addire sie, und setze

$$(2)\qquad \begin{cases} \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = a, \\ \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3 = b, \\ \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3 = c, \\ \delta_1 e_1 + \delta_2 e_2 + \delta_3 e_3 = d, \end{cases}$$

so erhält man die Gleichung

$$(3)\qquad xa + yb + zc = d.$$

Multiplicirt man diese Gleichung kombinatorisch mit $b.c$, so erhält man, weil $b.b.c$ und $c.b.c$ nach Nr. 12 null sind, die Gleichung

$$x.a.b.c = d.b.c, \text{ also } x = \frac{d.b.c}{a.b.c},$$

und auf ähnliche Weise findet man y und z, und erhält

$$(4)\qquad x = \frac{d.b.c}{a.b.c}, \quad y = \frac{a.d.c}{a.b.c}, \quad z = \frac{a.b.d}{a.b.c}.$$

Diese Ausdrücke (in welchen die Gesetze der kombinatorischen Multiplikation kein Heben der einzelnen kombinatorischen Faktoren gestatten) sind äusserst bequem für die Analyse. Will man die Unbekannten in der gewöhnlichen Form ausgedrückt erhalten, so hat man nur aus Gleichung (2) zu substituiren, nach Aufgabe 1 zu entwickeln und $e_1 e_2 e_3$ nach Nr. 10 im Zähler und Nenner zu heben; zum Beispiel findet man

$$(5)\qquad x = \frac{\delta_1\beta_2\gamma_3 - \delta_1\beta_3\gamma_2 + \delta_3\beta_1\gamma_2 - \delta_3\beta_2\gamma_1 + \delta_2\beta_3\gamma_1 - \delta_2\beta_1\gamma_3}{\alpha_1\beta_2\gamma_3 - \alpha_1\beta_3\gamma_2 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 - \alpha_3\beta_2\gamma_1 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 - \alpha_2\beta_1\gamma_3}.$$

Man sieht, wie dies Verfahren nicht nur überhaupt für n Gleichungen ersten Grades mit n Unbekannten anwendbar ist, sondern wie man auch bei einiger Geläufigkeit hiernach sogleich das Endresultat hinschreiben kann, sobald die n Gleichungen gegeben sind.

284 **IV. Anschauliche Begriffe der verschiedenen Grössen und Verknüpfungsweisen in der Geometrie.**

13. Die räumlichen Grössen erster Stufe sind einfache oder vielfache Punkte, und gerade Linien von bestimmter Länge und Richtung. (§ 13—§ 19.)

Sind A und B Punkte, so bezeichne ich die gerade Linie von A nach B, so fern an ihr zugleich Länge und Richtung, aber auch nichts weiter, festgehalten wird, mit $B-A$; ich sage also, dass $B-A$ dann und nur dann gleich $B_1 - A_1$ sei, wenn die geraden Linien | von [343]
A nach B und von A_1 nach B_1 gleiche Länge und Richtung haben.

14. Die räumlichen Grössen n-ter Stufe entstehen durch kombinatorische Multiplikation von n Grössen erster Stufe, welche als Faktoren erster Ordnung angenommen werden.

In diesem Falle, wenn nämlich die Faktoren erster Ordnung zugleich Grössen erster Stufe sind, nenne ich die Multiplikation eine äussere.

15. Sind A, B, C, D Punkte, so bedeutet (§ 106—115)

1) $A.B$ die Linie, welche A und B zu Gränzpunkten hat, aufgefasst als bestimmter Theil der durch A und B bestimmten unendlichen geraden Linie.

2) $A.B.C$ das Dreieck, dessen Ecken A, B, C sind, aufgefasst als bestimmter Theil der durch A, B, C bestimmten unendlichen Ebene.

3) $A.B.C.D$ das Tetraeder, dessen Ecken A, B, C, D sind, aufgefasst als bestimmter Theil des unendlichen Körperraumes.

Das heisst, wir setzen $A.B = A_1.B_1$, wenn beide Produkte gleiche und gleichbezeichnete*) Theile derselben geraden Linie vorstellen; ferner

$$A.B.C = A_1.B_1.C_1,$$

wenn beide Dreiecke gleiche und gleichbezeichnete Theile derselben Ebene sind; endlich

$$A.B.C.D = A_1.B_1.C_1.D_1,$$

wenn beide Tetraeder gleichen und gleichbezeichneten Inhalt haben.

16. Sind a, b, c Linien von bestimmter Länge und Rich- 285
tung, so bedeutet (§ 28—36)

1) $a.b$ das Parallelogramm, dessen Seiten gleich und parallel a und b sind, und zwar aufgefasst als Flächenraum von bestimmter Grösse und Ebenen-Richtung**).

2) $a.b.c$ das Spath (Parallelepipedum), dessen Kanten

---

*) Gleichbezeichnet nenne ich zwei Grössen, welche entweder beide positiven, oder beide negativen Werth haben.

**) Von zwei parallelen Ebenen sage ich, dass sie gleiche Ebenen-Richtung haben.

gleich und parallel a, b, c sind, und zwar aufgefasst als Körperraum von bestimmter Grösse.

Das heisst, wir setzen

$$a \,.\, b = a_1 \,.\, b_1,$$

wenn die Parallelogramme, welche durch diese Produkte dargestellt sind, in parallelen Ebenen liegen und gleichen und gleichbezeichneten Flächenraum haben;

$$a \,.\, b \,.\, c = a_1 \,.\, b_1 \,.\, c_1,$$

[344] wenn die durch diese Produkte dargestellten Spathe gleichen und gleichbezeichneten Inhalt haben.

17. Die Seite (rechte oder linke), nach welcher die Konstruktion einer räumlichen Grösse erfolgt, bestimmt ihren positiven oder negativen Werth, nämlich

1) Zwei Theile derselben Linie, $A \,.\, B$ und $A_1 \,.\, B_1$, setzen wir als gleichbezeichnet, wenn B von A aus nach derselben Seite liegt, wie B_1 von A_1 aus.

2) Zwei Theile derselben Ebene, $A \,.\, B \,.\, C$ und $A_1 \,.\, B_1 \,.\, C_1$, setzen wir als gleichbezeichnet, wenn C von $A \,.\, B$ aus nach derselben Seite hin liegt, wie C_1 von $A_1 \,.\, B_1$ aus, oder deutlicher, wenn dem, der in A stehend nach B sieht, C nach derselben Seite hin liegt, wie C_1 dem liegt, der in A_1 stehend nach B_1 sieht.

3) Zwei Körpertheile $A \,.\, B \,.\, C \,.\, D$ und $A_1 \,.\, B_1 \,.\, C_1 \,.\, D_1$ setzen wir als gleichbezeichnet, wenn D von $A \,.\, B \,.\, C$ aus nach derselben Seite hin liegt, wie D_1 von $A_1 \,.\, B_1 \,.\, C_1$ aus; oder deutlicher, wenn einer menschlichen Figur, die den Kopf nach A, die Füsse nach B, das Auge
286 nach C hin gerichtet hat, der Punkt D nach derselben | Seite liegt, wie D_1 einer Figur, die den Kopf nach A_1, die Füsse nach B_1, das Auge nach C_1 hin gerichtet hat.

4) Zwei parallele Flächenräume $a \,.\, b$ und $a_1 \,.\, b_1$ setzen wir als gleichbezeichnet, wenn die Richtung b von der Richtung a aus nach derselben Seite liegt, wie b_1 von a_1 aus.

5) Zwei Körperräume $a \,.\, b \,.\, c$ und $a_1 \,.\, b_1 \,.\, c_1$ setzen wir als gleichbezeichnet, wenn die Richtung c von $a \,.\, b$ aus nach derselben Seite hin liegt, wie c_1 von $a_1 \,.\, b_1$ aus, das heisst, wenn einer menschlichen Figur, welcher die Richtung a von den Füssen zum Kopfe geht, und deren Augen in der Richtung b_1 vorwärts sehen, die Richtung c nach derselben Seite liegt, wie die Richtung c_1 einer Figur, und so weiter.

18. Es giebt sieben Gattungen räumlicher Grössen, in vier Stufen vertheilt:

I. Stufe	1) Einfache oder vielfache Punkte. 2) Gerade Linien von bestimmter Länge und Richtung.
II. Stufe	3) Bestimmte Theile bestimmter unendlicher gerader Linien. 4) Ebene Flächenräume von bestimmter Grösse und Ebenen-Richtung.
III. Stufe	5) Bestimmte Theile bestimmter unendlicher Ebenen. 6) Bestimmte Körperräume.
IV. Stufe	7) Bestimmte Körperräume.

Hier kommen die Körperräume zweimal vor, theils als Grössen dritter Stufe, theils als Grössen vierter Stufe, je nachdem sie als Produkte dreier gerader Linien von bestimmter Richtung und Länge, oder als Produkte von vier Punkten aufgefasst werden.

19. Gleichbezeichnete Theile eines und desselben Ganzen geben als Summe einen ebenso bezeichneten | Theil desselben [345]
Ganzen, welcher so gross ist, als jene beiden zusammengenommen. (§ 8.)

Zum Beispiel $A.B$ und $A_1.B_1$ geben, wenn sie gleichgerichtete Theile derselben unendlichen geraden Linie sind, zur Summe einen eben so gerichteten Theil derselben Linie, welcher so gross ist, als jene beiden Theile zusammengenommen.

20. Je zwei Grössen derselben Stufe, aber auch | nur 287
solche, können addirt werden; der Begriff für die Addition solcher Grössen lässt sich allemal bestimmen, wenn man die vorher gegebene Bezeichnung dieser Grössen festhält, und die Rechnungsregeln aus III anwendet.

Aufgabe 3. *Zwei Punkte A und B zu addiren.*

Setzt man $A + B = 2S$, so erhält man $B - A = 2(S - A)$, das heisst, S ist die Mitte zwischen A und B. Also die Summe zweier Punkte ist die doppelt genommene Mitte zwischen beiden.

Aufgabe 4. *Zwei vielfache Punkte αA und βB zu addiren, wenn die Koefficienten α und β positiv sind, das heisst, den Punkt S zu finden, welcher der Gleichung*

$$\alpha A + \beta B = (\alpha + \beta) S$$

genügt. (§ 94—98.)

Soll dieser Gleichung genügt werden, so muss

$$\beta(B-A)=(\alpha+\beta)(S-A)$$

sein, und umgekehrt erhält man aus der letzten die erstere. Aus der letzten folgt aber die Konstruktion: Man nimmt von der Linie AB von A aus den Theil $\frac{\beta}{\alpha+\beta}$ $\left(\text{oder von } B \text{ aus den Theil } \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)$, so ist der Endpunkt dieses Theiles der Punkt S. — Also „die Summe zweier vielfachen Punkte mit positiven Koefficienten ist ein mit der Summe der Koefficienten multiplicirter Punkt, welcher in der geraden Linie zwischen beiden Punkten so liegt, dass seine Entfernungen von diesen beiden Punkten sich umgekehrt verhalten, wie die zu diesen Punkten gehörigen Koefficienten *)."

Aufgabe 5. *Einen Punkt A und eine gerade Linie von bestimmter Länge und Richtung $C-B$ zu addiren.*

Man konstruire eine gerade Linie von A aus, welche mit $C-B$ gleich lang und gleich gerichtet ist; diese sei $D-A$, so ist D die gesuchte Summe; denn da $C-B=D-A$ ist, so ist

$$A+(C-B)=A+(D-A)=D.$$

Also „die Summe eines Punktes A und einer geraden Linie von be-
288 stimmter Länge und Richtung ist der Endpunkt dieser Linie, wenn A ihr Anfangspunkt ist."

[346] Aufgabe 6. *Einen vielfachen Punkt αA und eine gerade Linie von bestimmter Länge und Richtung $C-B$ zu addiren.*

Man konstruire eine gerade Linie von A aus, welche mit $C-B$ gleiche Richtung hat, aber nur $\frac{1}{\alpha}$ so lang ist; diese sei $D-A$, so ist αD die gesuchte Summe. Denn da

$$C-B=\alpha(D-A)$$

ist, so ist

$$\alpha A+(C-B)=\alpha A+\alpha(D-A)=\alpha D.$$

Aufgabe 7. *Zwei gerade Linien von bestimmter Länge und Richtung $B-A$ und $D-C$ zu addiren.*

Man mache $E-B=D-C$, so ist

$$(B-A)+(D-C)=(B-A)+(E-B)=E-A.$$

Also „zwei Linien von bestimmter Länge und Richtung addirt man, indem man, ohne die Länge und Richtung zu verändern, auf den Endpunkt der einen den Anfangspunkt der andern legt, dann ist die gerade

*) Man sieht, dass dieser Punkt der Schwerpunkt ist, wenn die Koefficienten Gewichte vorstellen.

Linie vom Anfangspunkte der ersten zum Endpunkte der letzten die gesuchte Summe."

Aufgabe 8. *n gerade Linien von bestimmter Länge und Richtung zu addiren.*

Die wiederholte Anwendung der Auflösung von Aufgabe 7 führt sogleich zu der Lösung dieser Aufgabe, nämlich „n gerade Linien von bestimmter Länge und Richtung addirt man, indem man die einzelnen Linien, ohne ihre Richtung und Länge zu ändern, nach der Reihe stetig, das heisst, so an einander legt, dass, wo die eine aufhört, die nächstfolgende anfängt; dann ist die gerade Linie vom Anfangspunkte der ersten zum Endpunkte der letzten die gesuchte Summe."

Aufgabe 9. *Die Summe von n Punkten $A_1, A_2, \ldots A_n$ zu finden, das heisst, den Punkt S zu finden, welcher der Gleichung*

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n = nS$$

genügt.

Subtrahirt man auf beiden Seiten dieser Gleichung nR, wo R ein beliebiger Punkt ist, so erhält man

$$(A_1 - R) + (A_2 - R) + \cdots + (A_n - R) = n(S - R),$$

und, da aus dieser Gleichung wieder die erstere sich ableiten lässt, so folgt: „Um n Punkte zu addiren, zieht man von einem beliebigen Punkte R die geraden Linien nach den n Punkten, legt sie, ohne ihre 289
Richtung und Länge zu ändern, stetig an einander und zwar so, dass der Anfangspunkt der ersten auf R fällt, verbindet R mit dem Endpunkte der letzten durch eine gerade Linie und theilt diese Verbindungslinie in n gleiche Theile, so ist der erste Theilpunkt von R aus der Punkt S, dessen n-faches die gesuchte Summe ist."

Aufgabe 10. *Beliebig viele vielfache Punkte $\alpha A, \beta B, \ldots$ zu addiren, wenn die Summe der Koefficienten $\alpha + \beta + \cdots$ nicht null ist.*

Setzt man

$$\alpha A + \beta B + \cdots = (\alpha + \beta + \cdots) S,$$

und subtrahirt auf beiden Seiten $(\alpha + \beta + \cdots) R$, wo R ein beliebiger [347]
Punkt ist, so erhält man

$$\alpha(A - R) + \beta(B - R) + \cdots = (\alpha + \beta + \cdots)(S - R).$$

Also, da auch hieraus wieder die erste Gleichung sich ableiten lässt, so folgt „die Summe von beliebig vielen vielfachen Punkten $\alpha A, \beta B, \ldots$, deren Koefficienten-Summe nicht null ist, findet man, indem man von irgend einem Punkte R aus die Linien nach $A, B, \ldots$ legt, diese dann beziehlich mit $\alpha, \beta, \ldots$ multiplicirt*), die so gewonnenen Linien, ohne

*) Durch solche Multiplikation mit einer Zahlgrösse α ändert sich, wie man

ihre Richtung und Länge zu ändern, stetig an einander legt, so dass der Anfangspunkt der ersten in R fällt, dann R mit dem Endpunkte der letzten verbindet und von der Verbindungslinie von R aus den Theil $\frac{1}{\alpha + \beta + \cdots}$ nimmt, so ist der mit $(\alpha + \beta + \cdots)$ multiplicirte Endpunkt dieses Theiles die gesuchte Summe."

Aufgabe 11. *Die Summe von vielfachen Punkten αA, βB, ... zu finden, wenn $\alpha + \beta + \cdots = 0$ ist.*

Man subtrahire von der Summe $\alpha A + \beta B + \cdots$ den Ausdruck $(\alpha + \beta + \cdots) R$, so wird, da diese subtrahirte Grösse null ist, der Werth der Summe nicht geändert, also ist

$$\alpha A + \beta B + \cdots = \alpha (A - R) + \beta (B - R) + \cdots.$$

Also „die Summe von vielfachen Punkten, deren Koefficientensumme null ist, ist eine gerade Linie von bestimmter Länge und Richtung,
290 die | man dadurch findet, dass man von einem beliebigen Punkte R die geraden Linien nach den gegebenen Punkten zieht, diese mit den diesen Punkten zugehörigen Koefficienten multiplicirt, und die Produkte addirt."

Aufgabe 12. *Zwei Theile $A.B$ und $C.D$ von Linien, die sich in E schneiden, zu addiren.*

Man mache $E.F$ gleich $A.B$ und $E.G$ gleich $C.D$, so ist

$$A.B + C.D = E.F + E.G = E.(F + G) = 2E.S,$$

wenn S die Mitte von F und G ist (vgl. Aufgabe 3). Also „zwei Theile von Linien, welche sich schneiden, addirt man, indem man diesen Theilen den Durchschnittspunkt als Anfangspunkt giebt; dann ist die doppelte gerade Linie vom Durchschnittspunkte zu der Mitte der beiden Endpunkte die gesuchte Summe*)."

Aufgabe 13. *Zwei parallele Linientheile $A.B$ und $C.D$ zu addiren, wenn beide nicht gleichlang und zugleich entgegengesetzt gerichtet sind.*

Wenn $A.B$ und $C.D$ parallel sind, so muss $D - C$ gleich
[348] $\alpha (B - A)$ sein, wo α irgend eine positive oder negative Zahl ist. | Da nun $A.B$ gleich $A.(B - A)$ ist, weil $A.A$ nach Nr. 12 null ist, so hat man

---

leicht sieht, wenn α positiv ist, die Richtung nicht, während die Länge im Verhältniss $1 : \alpha$ sich ändert; und ist α negativ, so wird die Richtung die entgegengesetzte.

*) Diese ist zugleich die Diagonale des Parallelogramms, welches jene Linientheile zu Seiten hat, woraus man sieht, dass die Summe der Linientheile die zusammengesetzte Kraft ist, wenn die Linientheile Kräfte vorstellen.

$$\begin{aligned} A.B + C.D &= A.(B-A) + C.(D-C) \\ &= A.(B-A) + \alpha C.(B-A) \\ &= (A+\alpha C)(B-A). \end{aligned}$$

Ist die Summe $A + \alpha C$ gleich $(1+\alpha)S$ (vgl. Aufgabe 4), so wird der letzte Ausdruck

$$= S.(1+\alpha)(B-A) = S.(B-A+D-C),$$

worin eine einfache Konstruktion jener Summe liegt.

Aufgabe 14. *Zwei gleich lange und entgegengesetzt gerichtete Linientheile $A.B$ und $C.D$ zu addiren.*

Liegen beide in derselben geraden Linie, so ist die Summe null. Ist dies nicht der Fall, so ist, weil $D - C = -(B-A)$ ist,

$$\begin{aligned} A.B + C.D &= A.(B-A) + C.(D-C) \\ &= A.(B-A) - C.(B-A) \\ &= (A-C).(B-A). \end{aligned}$$

Dann ist die Summe also ein Flächenraum von bestimmter Grösse 291 und Ebenen-Richtung*).

Aufgabe 15. *Zwei Flächenräume von bestimmter Grösse und Ebenenrichtung $a.b$ und $c.d$ zu addiren.*

Sind die Ebenen parallel, so können sie schon nach Nr. 19 addirt werden; sind sie es nicht, so werden beide Ebenen eine Richtung gemeinschaftlich haben. Es sei e eine gerade Linie, welche diese Richtung hat, und $a.b$ gleich $e.f$, $c.d$ gleich $e.g$, so ist

$$a.b + c.d = e.f + e.g = e.(f+g).$$

Aufgabe 16. *Zwei Theile $A.B.C$ und $D.E.F$ bestimmter Ebenen, die nicht parallel sind, zu addiren.*

Sind die Ebenen nicht parallel, so werden sie sich schneiden. Es sei $G.H$ ein Theil der Durchschnittslinie, und es sei $A.B.C$ gleich $G.H.J$, $D.E.F$ gleich $G.H.K$, so ist

$$\begin{aligned} A.B.C + D.E.F &= G.H.J + G.H.K \\ &= G.H.(J+K) = 2G.H.S, \end{aligned}$$

wenn S die Mitte zwischen J und K ist. Also „Zwei Theile nicht paralleler Ebenen addirt man, indem man sie als Dreiecke darstellt, deren gemeinschaftliche Grundseite in dem Durchschnitt beider Ebenen

---

*) Wie die Summe zweier Linientheile, die nicht in derselben Ebene liegen, zu behandeln sei, kann ich hier nicht ausführen (vgl. Ausdehnungslehre § 51 u. § 122).

[349] liegt; dann ist das Doppelte des Dreiecks, | was dieselbe Grundseite hat, und dessen Spitze die Mitte ist zwischen den Spitzen jener Dreiecke, die gesuchte Summe."

Aufgabe 17. *Zwei Theile $A.B.C$ und $D.E.F$ paralleler Ebenen zu addiren.*

Sind die Ebenen parallel, so muss $(E-D).(F-D)$ gleich $\alpha(B-A).(C-A)$ gesetzt werden können, wo α eine Zahlengrösse ist. Dann ist

$$\begin{aligned} A.B.C+D.E.F &= A.(B-A).(C-A)+D.(E-D).(F-D)^{*)} \\ &= (A+\alpha D).(B-A).(C-A) \\ &= S.(1+\alpha).(B-A).(C-A), \end{aligned}$$

wenn $(1+\alpha)S$ die Summe von $A+\alpha D$ ist. Der letzte Ausdruck ist

$$= S[(B-A).(C-A)+(E-D).(F-D)],$$

292 worin wieder eine einfache Konstruktion liegt. Ist jedoch $\alpha=-1$, das heisst, sind beide Flächenräume gleich gross, aber entgegengesetzt bezeichnet, so ist $A+\alpha D$ eine gerade Linie von bestimmter Richtung und Länge (Aufgabe 11); ist diese gleich $H-G$, so ist

$$A.B.C+D.E.F=(H-G).(B-A).(C-A),$$

also die Summe dann ein Körperraum.

Aufgabe 18. *Einen Theil $A.B.C$ einer bestimmten Ebene und einen Körperraum $(D-A).(B-A).(C-A)$ zu addiren.*

$$\begin{aligned} &A.B.C+(D-A).(B-A).(C-A)= \\ &=A.(B-A).(C-A)+(D-A).(B-A).(C-A) \\ &=D.(B-A).(C-A), \end{aligned}$$

woraus der Begriff dieser Addition leicht hervorgeht.

21. Ein kombinatorisches Produkt, dessen Faktoren erster Ordnung Grössen $(n-1)$-ter Stufe sind, welche aber alle in einem und demselben Gebiete n-ter Stufe liegen, nenne ich ein eingewandtes Produkt, und zwar ein auf jenes Gebiet bezügliches;

zum Beispiel ein kombinatorisches Produkt von Linientheilen in der Ebene, oder von Ebenentheilen im Raume.

22. Wird von jetzt an die äussere Multiplikation durch blosses Aneinanderschreiben, die eingewandte Multiplikation durch einen zwischen die Faktoren gesetzten Punkt bezeichnet, so verstehen wir

---

*) vgl. Nr. 12.

unter dem eingewandten Produkte $AB.AC$, wo A, B, C beliebige Grössen sind, das Produkt $ABC.A$, in welchem ABC wie ein zu A gehöriger Koefficient behandelt wird, vorausgesetzt, dass das Produkt auf das Gebiet von niedrigster Stufe, in welchem A, B und C zugleich liegen, bezogen wird.

Aufgabe 19. *Das auf die Ebene ABC bezügliche Produkt zweier Linientheile $AB.AC$ zu finden.*

Nach Nr. 22 ist dasselbe gleich $ABC.A$; das heisst „das Pro- [350]
dukt zweier Linientheile, deren Linien sich schneiden, ist der Durchschnittspunkt, verbunden mit einem Theil der Ebene als Koefficienten.“ Denkt man sich einen Theil der Ebene als Einheit angenommen, so werden die Ebenentheile, mit denen die Punkte behaftet sind, wirkliche Zahlgrössen und die Produkte erscheinen als vielfache Punkte; doch müssen dann alle zu vergleichenden Grössen in derselben Ebene,
auf die sich die Produkte beziehen, liegen (wie dies in der Plani- 293
metrie immer der Fall ist).

Aufgabe 20. *Das Produkt dreier Linientheile AB, AC, BC in Bezug auf die Ebene ABC zu finden.*

Auflösung. $AB.AC.BC = ABC.ABC = (ABC)^2$.

Aufgabe 21. *Das eingewandte Produkt zweier Ebenentheile ABC und ABD (in Bezug auf den Körperraum) zu finden.*

Auflösung. $ABC.ABD = ABCD.AB$.

Aufgabe 22. *Das eingewandte Produkt dreier Ebenentheile ABC, ABD, ACD zu finden.*

Auflösung.
$$ABC.ABD.ACD = ABCD.ABCD.A = (ABCD)^2.A.$$

Aufgabe 23. *Das eingewandte Produkt von vier Ebenentheilen ABC, ABD, ACD, BCD zu finden.*

Auflösung. $ABC.ABD.ACD.BCD = (ABCD)^3$.

Anmerkung. Das Produkt zweier Ebenentheile giebt also einen Linientheil, das dreier einen Punkt, aber jener Linientheil und dieser Punkt haben dann noch einen Raumtheil oder ein Produkt von Raumtheilen als Koefficienten, und nimmt man einen Raumtheil als Einheit an, so gehen diese Koefficienten in wirkliche Zahlgrössen über.

Dies etwa sind die wesentlichsten Begriffe, welche in dem ersten Theile meiner Ausdehnungslehre vorkommen. Aber es ist unmöglich, von der unendlichen Fruchtbarkeit dieser neuen Methode für die Behandlung nicht nur der Raumlehre, sondern überhaupt aller Wissenschaften, welche auf räumliche Verhältnisse zurückgehen, hier auch nur einen oberflächlichen Begriff zu geben. Ebenso wenig konnte ich hier die Beweise liefern, dass in der That die in III gegebenen Rechnungsregeln für die einzelnen hier dargelegten Verknüpfungsweisen gelten, sondern auch hier muss ich auf meine ausführliche Schrift verweisen, in welcher diese Beweise in aller Strenge geführt sind, und wo zugleich die Entwickelung überall in der Art fortschreitet, dass alles Willkührliche, was noch in der Aufstellung der verschiedenen Begriffe zu liegen scheint, verschwindet.

Alphabetisches Verzeichniss der gebrauchten Kunstausdrücke. (1877.) 294

Die Kunstausdrücke, welche ich später ganz aufgegeben habe, sind eingeklammert. Zu denjenigen, welche ich in der Ausdehnungslehre von 1862 durch andere ersetzt habe, sind die letzteren hinzugefügt und durch ein Gleichheitszeichen mit jenen verbunden.

Inhalt. 296 *275*

Erster Abschnitt. Die Ausdehnungsgrösse.

Erstes Kapitel.

Seite

Drittes Kapitel.

Viertes Kapitel.